Grafici di funzioni

Grafico di una funzione

Esempio e controesempio

Dominio massimale

Crescenza stretta/debole

Esempio (importante $x^2+xy+y^2>0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$)

Decrescenza stretta/debole

Teorema: crescenza (decrescenza) $\Rightarrow$ iniettività

Controesempio iniettività $\not\Rightarrow$ crescenza (decrescenza)

funzioni pari/dispari

$f^+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2} = \max\{f(x),0\}$ $f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} = \max\{-f(x),0\}$

$f^+(x)+f^-(x) = |f(x)|$

$f^+(x)-f^-(x) = f(x)$

definizione di $f^p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ $f^d = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

funzione periodica (definizione)

periodo e minimo periodo

somma di funzioni periodiche con periodi in rapporto razionale

Esercizi (*)

Parabola e disequazioni di 2° grado

Esercizi da 4.7 a 4.17

Costruire $f^+(x) = \max\{f(x),0\}$ $f^-(x) = \max\{-f(x),0\}$

N.B. Fondamentali gli esercizi (*) e gli esercizi da 4.7 a 4.17

fondamentale la parabola e le diseq. di 2° grado

Non insistere troppo sulle f.ni periodiche

Def. di $f: A \to B$

Spesso $A = B = \mathbb{R}$

quindi il grafico è in
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

→ **<u>Relazione</u>** di A in B

(cioè un sottoinsieme
del prodotto cartesiano
$A \times B$)

è t. che

$\forall x \in A$, $\exists! \, y \in B$ $\rightarrow$ significa: esiste ed è unico

con $y = f(x)$

$\Downarrow$

1° vincolo

$\Downarrow$

2° vincolo

da qui, la ricerca del C. E.
(dominio massimale)

Grafico di $f: A \to B$ $\underset{Def}{=}$ data una funzione $f: A \to B$ 1

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

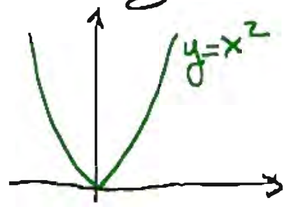
↳ immagine di x per la f

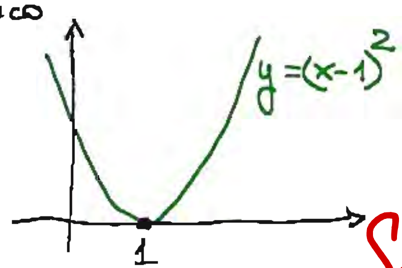
- $\mathcal{G}(f)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

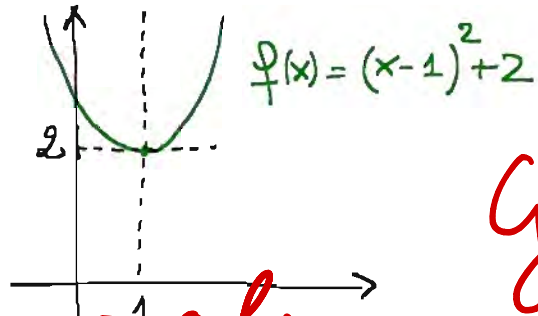
QS **Esempio** Data $f(x) = x^2 - 2x + 3$, che è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, questa si può scrivere

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2$$

Per disegnarne il grafico







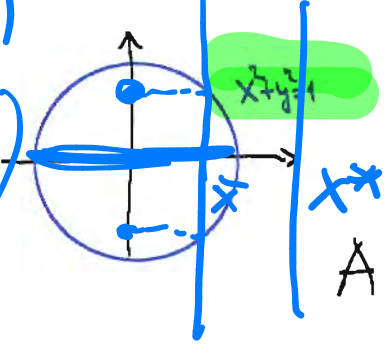
Se ho una f, trovo il suo $\mathcal{G}(f)$ MA un grafico può "provenire" da una curva che però non è una f

ovvero
- disegno di $g(x) = x^2$ (noto)
- disegno di $g(x-1) = (x-1)^2$ (traslazione rispetto a x)
- disegno di $f(x) = g(x-1) + 2$ (traslazione rispetto a y)

Controesempio L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} = A$
NON È grafico di nessuna funzione : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(\bar{x}, f_1(x))$

$(\bar{x}, f_2(x))$



$$A = \{(x,y) : y = \sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1,1]\} \cup \{(x,y) : y = -\sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1,1]\}$$

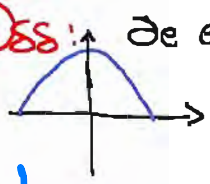
$$\Downarrow$$

$$A = \{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in [-1,1]\} \cup \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in [-1,1]\}$$

$\exists \, \bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \exists \, y_1 = \frac{1}{2} \; y_2 = -\frac{1}{2}$ t.c. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

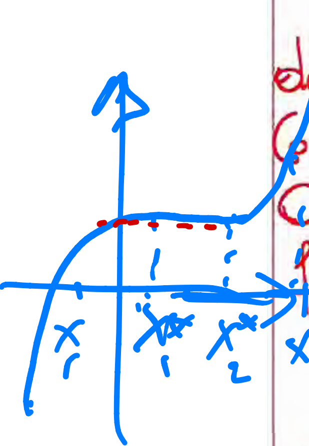
(si osservi che una f.ne $f: A \to B$ soddisfa $(*)$ $\boxed{\forall x \in A \; \exists! \, y \in B \;\; f(x) = y}$, e nell'esempio abbiamo negato $(*)$)

Oss: Se considero la semicirconferenza di figura 2



questa è il grafico di $f: [-1,1] \to \sqrt{1-x^2}$

dominio massimale di una funzione reale $\equiv_{Def} \{x\in\mathbb{R} : f(x)\in\mathbb{R}\}$
(o campo di esistenza)



Oss: è l'insieme dove ha senso $f(x)$

funzione debolmente crescente $\equiv_{Def}$ $f: A\to B : \forall x,y\in A \ \ x<y \Rightarrow f(x)\le f(y)$

$f(x)\le f(y)$

$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$

" **strettamente** " $\equiv_{Def}$ $f: A\to B \ \ \forall x,y\in A \ \ x\le y \Rightarrow f(x)<f(y)$

x<y implica f(x)<f(y)

Esempio $f(x)=x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$

$x_1 < x_2$

$\Downarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$

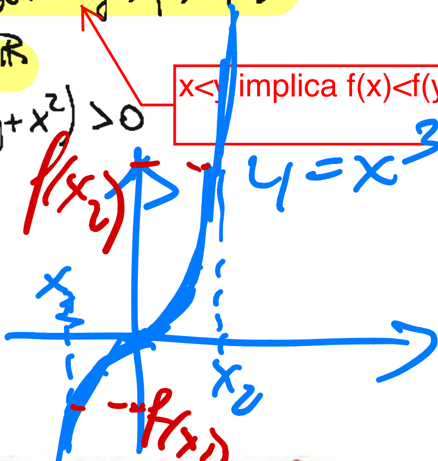
dim $\quad y^3>x^3 \iff y^3-x^3=(y-x)(y^2+xy+x^2)>0$

utilizzando la divisione tra polinomi

Inoltre $\ y^2+xy+x^2>0 \ \ \forall (x,y)\ne(0,0)$

Ne segue che, $\forall (x,y)\ne(0,0)$ $\quad y^3>x^3$ sse $y>x$

da cui segue la tesi ∎



Oss: $x^2+xy+y^2>0 \ \ \forall(x,y)\ne(0,0)$ (UTILE SE FATTA DAL DOCENTE)

Osservo che $\ x^2+y^2+xy=0$ sse $y=\frac{1}{2}\left(-x\pm\sqrt{-3x^2}\right)\notin\mathbb{R} \quad x\ne0$

dunque si tratta di stabilire il segno.

$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy\ge0 \Rightarrow x^2+y^2\ge 2xy \Rightarrow x^2+y^2+xy\ge 3xy$$

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\ge0 \Rightarrow x^2+y^2\ge -2xy \Rightarrow x^2+y^2+xy\ge -xy$$

e dunque $\ x^2+y^2+xy\ge \max\{3xy,-xy\}$

ma $\max\{3xy,-xy\}>0 \ \ \forall x\ne0, y\ne0$, da cui segue

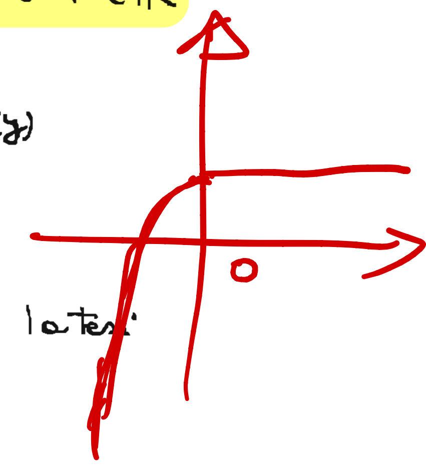
$$x^2+y^2+xy>0 \ \ \forall x\ne0, y\ne0$$

Quando $\ x=0, y\ne0 \quad x^2+xy+y^2=y^2>0$

" $\quad x\ne0 \ \ y=0 \quad x^2+xy+y^2=x^2>0$

Ne segue la tesi $\quad x^2+y^2+xy>0 \ \ \forall(x,y)\ne(0,0)$ ∎

Esempio $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ è debolmente crescente $\forall x \in \mathbb{R}$



dim. Devo provare che $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\quad x<y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

1) $x<y\le 0$

$f(y)-f(x) = 1-y^2-(1-x^2) = (x^2-y^2) = \overbrace{(x-y)}^{(A)}\overbrace{(x+y)}^{B} > 0$

Infatti $y \le 0$ e $x<y \Rightarrow \begin{cases} x-y<0 & (A) \\ x+y<0 & (B) \end{cases}$ da cui la tesi

2) $x \le 0 < y$

$f(y)-f(x) = 1-(1-x^2) = x^2 \ge 0$ da cui la tesi

3) $0<x<y$

$f(y)-f(x) = 1-1 = 0 \ge 0$ da cui la tesi ∎

funzione debolmente decrescente $\underset{Def}{=}$ $f:A\to B$ $\forall x,y \in A$ $x<y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$

" strettamente " $\underset{Def}{=}$ $f:A\to B$ $\forall x,y \in A$ $x<y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Esempio $f(x) = x^2$ è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$

dim $f(y)-f(x) = y^2-x^2 = (y-x)(y+x)$

ma $x<y \quad y \le 0 \Rightarrow \begin{cases} y-x>0 \\ x+y<0 \end{cases} \Rightarrow (y-x)(y+x)<0 \Rightarrow f(y)-f(x)<0$ Tesi ∎

monotòna

QS Teorema $f:A\to B$ $\boxed{\text{strettamente}}$ crescente (decrescente) $\forall x_1, x_2$ $\quad x_1 \ne x_2$

$\Rightarrow f$ è iniettiva

dim sia f strett. crescente: $\forall x,y \in A$ $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

$x \ne y \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ① \; x<y \Rightarrow f(x)<f(y) \\ ② \; y<x \Rightarrow f(y)<f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \ne f(y)$ ∎

$x_2<x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$

Oss: In alternativa si può dimostrare l'enunciato equivalente "non B $\Rightarrow$ non A" ovvero

f non è iniettiva $\Rightarrow f$ non è $\begin{cases} \text{né strettamente crescente} \\ \text{" \quad " \quad decrescente} \end{cases}$. Infatti

f non iniettiva $\Rightarrow \exists\, x_1 \ne x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2)$

supponendo che $x_1<x_2$ abbiamo $f(x_1) = f(x_2)$

e quindi f NON È strettamente crescente (decrescente) ∎

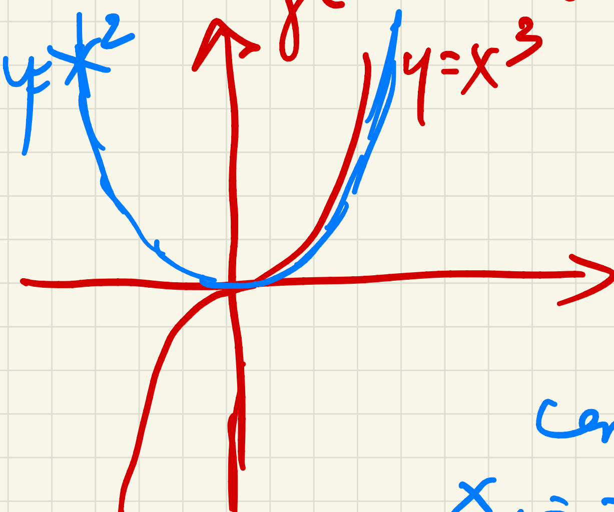
Funzione iniettiva f

$f: A \to B$

<u>se</u> $\forall x_1, x_2 \in A$, con $x_1 \neq x_2$

si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$

"elementi distinti hanno immagini distinte"



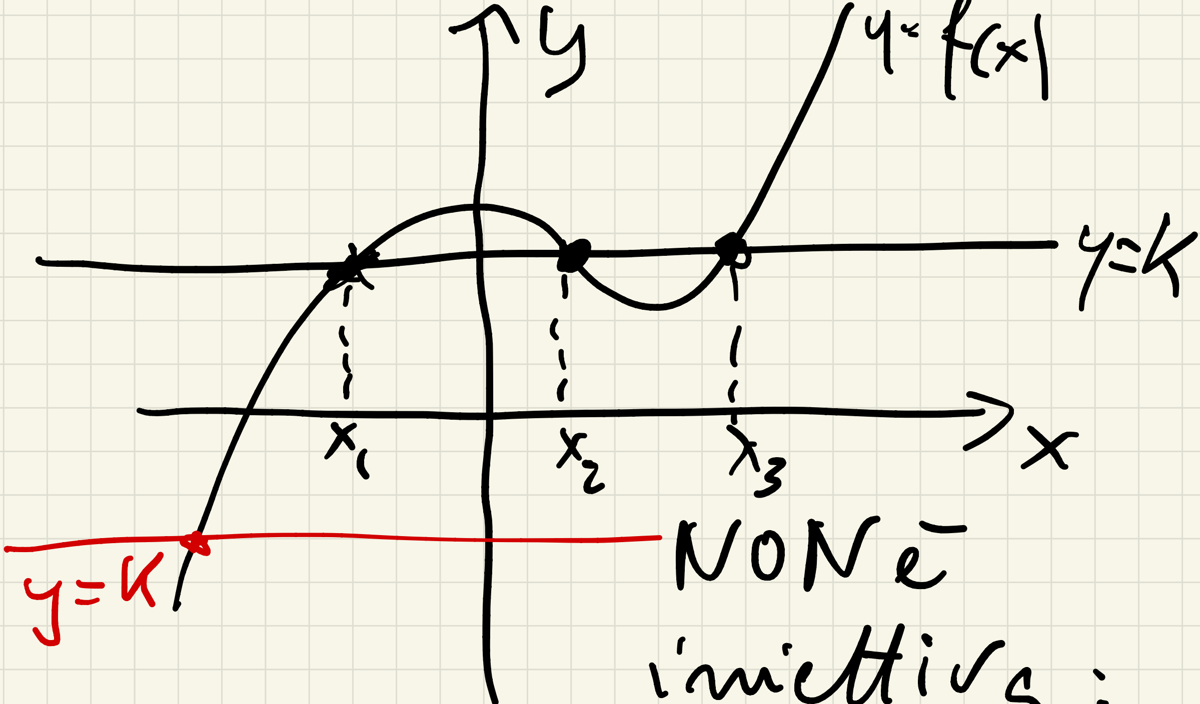
iniettiva

<u>non</u> è iniettiva

mi basta un controesempio:

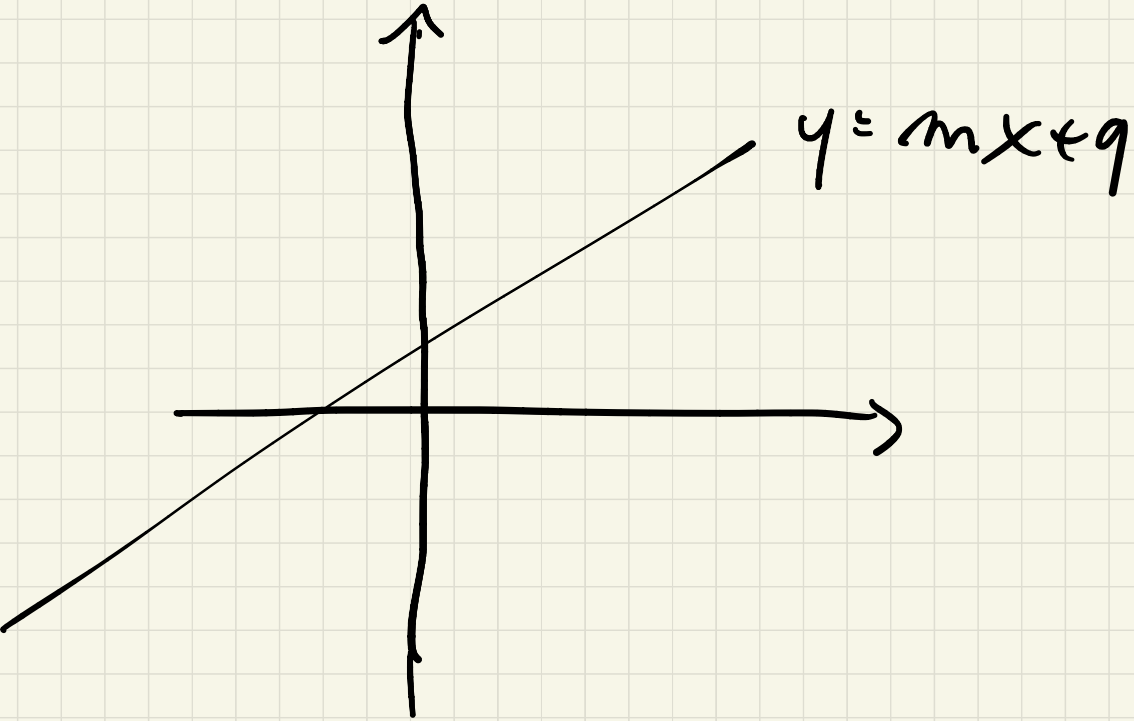
$x_1 = -3$ e $x_2 = 3$

$x_1 \neq x_2$ <u>ma</u> $f(x_1) = f(x_2) = 9$



NON è iniettiva:

considero la retta $y=K$ e conto le $\cap$ con il $G(f)$

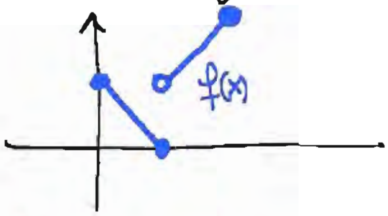

$y = mx + q$

Ma il Teorema precedente è una condizione solo Necessaria

CONTROESEMPIO $f: A \to B$ iniettiva $\not\Rightarrow$ f strettamente crescente (decrescente)

presa $f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1 \\ x & 1 < x \le 2 \end{cases}$

questa è iniettiva (i due tratti sono grafici di funzioni iniettive)



Ma non è né crescente strett. né decrescente "

l'insieme $-A$ $\equiv_{Def}$ Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, si definisce

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$$

Esempio Dato $A = [1,3[$, si ha $-A =]-3,-1]$

Dato $B =]-1,4]$, " " $-B = [-4,1[$

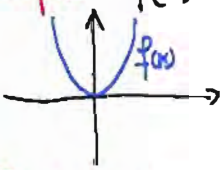
(un disegno può aiutare!)

A insieme simmetrico (rispetto a $x=0$) $\equiv_{Def}$ $A = -A$

Esempio $A =]-3,3[\Rightarrow A = -A =]-3,3[$

funzione pari $\equiv_{Def}$ $f: A \to B$, con A t.c. $A = -A$, si dice pari se $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in A$

Esempio: $f(x) = x^2$ $f: [-a,a] \to \mathbb{R}$ è una funzione pari



(il grafico è simmetrico rispetto all'asse y!!)

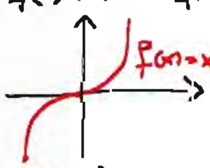
Controesempio: $f(x) = \log(1+x)$ $f:]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ non è pari

Problema: $f: A \to \mathbb{R}$, $A = -A$, f pari $\overset{?}{\Rightarrow}$ esiste $f(0)$

Risposta NO: si prenda $f(x) = \log(x^2)$ $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

funzione dispari $\equiv_{Def}$ $f: A \to B$, con A t.c. $A = -A$ si dice dispari se $-f(x) = f(-x)$ $\forall x \in A$

Esempio $f(x) = x^3$ $f: [-a,a] \to \mathbb{R}$ è una funzione dispari



Il grafico è simmetrico rispetto all'origine!!

Controesempio $f(x) = \cos x$ $f: [-2\pi, 2\pi]$ non è dispari

Problema: $f: A \to \mathbb{R}$ $A = -A$ $0 \in A$ f dispari $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f(0) = 0$

Risposta: SI poiché deve essere $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in A \Rightarrow f(0) = -f(0)$

$\Rightarrow f(0) = 0$

Parte positiva di f $\equiv_{Def}$ $f: A \to \mathbb{R}$, definiamo $\boxed{f^+(x) = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}}$ $f^+(x)$

$\frac{f(x)+f(x)}{2} = f(x)$

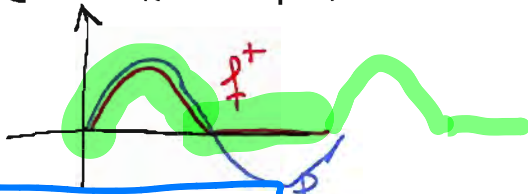
Osservazione $f^+(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$ (facile da provare)

Osservazione $f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \forall x$ (non difficile da provare)

$\frac{f(x)-f(x)}{2} = 0$

Esempio $f(x) = \operatorname{sen} x \quad x \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \quad f^+(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$



Parte negativa di f $\equiv_{Def}$ $f: A \to \mathbb{R}$ $\boxed{f^-(x) = \frac{-f(x)+|f(x)|}{2}}$ $\frac{-f(x)+f(x)}{2} = 0$

Osservazione $f^-(x) \geq 0 \quad \forall x$ (facile)

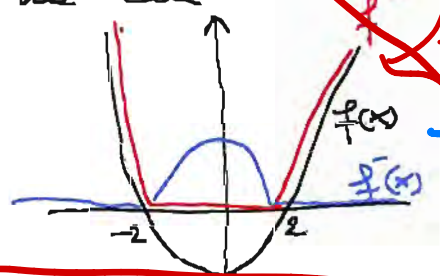
Osservazione $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ (non difficile)

$\frac{-f(x)-f(x)}{2} = -f(x)$

Esempio $f(x) = x^2 - 4$ si ha che

$$f^-(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x \in [-2,2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f^+(x) = \begin{cases} x^2-4 & x \leq -2 \\ 0 & -2 < x < 2 \\ x^2-4 & 2 \leq x \end{cases}$$



IMPORTANTE:
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom}(f) \\ |f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom}(f) \end{array}}$$

Oss: Data $f: A \to \mathbb{R}$ con $A = -A$, si possono definire

$$f^p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad f^d(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

e si verifica

1) $f^p(x)$ è pari, $\forall f$
2) $f^d(x)$ è dispari, $\forall f$
3) $f^p(x) + f^d(x) = f(x)$
4) f è pari $\Rightarrow f^p(x) = f(x)$ mentre $f^d(x) = 0$
5) f è dispari $\Rightarrow f^p(x) = 0$ mentre $f^d(x) = f(x)$

Funzioni Periodiche

funzione periodica $\equiv_{Def}$ $f: A \to \mathbb{R}$ si dice "periodica di periodo $T(>0)$" se

1) $\forall x$ $x \in A$ se $x+T \in A$ (condizione sul dominio)
2) $\forall x \in A$ $f(x+T) = f(x)$ (" sulla funzione)

Esempio: $f(x) = x-2k$ $x \in [-1+2k, 1+2k[$ è periodica

$$f(x) = \begin{cases} \dots \\ x-2 & \text{se } x \in [-3,-1[\\ x & \text{se } x \in [-1,1[\\ x+2 & \text{se } x \in [1,3[\\ \dots \end{cases}$$

Osservazione quando $A = \mathbb{R}$, la def. precedente si riduce al punto 2), ovvero $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

S **Esercizio** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo T T è il minimo

$\Rightarrow$ f periodica di periodo $2T$ ($3T$, $4T$, ---)

(verifica diretta osservando che $f(x+2T) = f(x+T)$)

Problema $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T periodica $\Rightarrow$ f è $T/2$ periodica?

Risposta: NO $f(x) = \operatorname{sen} x$ è 2π periodica, però

$$f(x+\pi) = \operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x \neq \operatorname{sen} x = f(x) \quad \forall x \neq 0, \pi$$

e dunque NON è π-periodica

Osservazione: ha senso parlare di minimo periodo T per una funzione f, ma non è detto che questo minimo esista

Esercizio $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$ è periodica? Se sì, quale è il suo minimo periodo?

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

dim $f(x+T) = \operatorname{sen}(3(x+T)) = \operatorname{sen}(3x+3T) =$

$$= \boxed{\operatorname{sen} 3x \cos 3T + \operatorname{sen} 3T \cos 3x = \operatorname{sen} 3x} = f(x)$$

dovrebbe valere $\forall x \in \mathbb{R}$

che equivale $\operatorname{sen} 3x (\cos 3T - 1) + \cos 3x \operatorname{sen} 3T = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

" " " $\begin{cases} \cos 3T = 1 \\ \operatorname{sen} 3T = 0 \end{cases}$ questo segue dall'indipendenza tra $\operatorname{sen} 3x$ e $\cos 3x$

$$T = \frac{2\pi}{n}$$

" " " $\boxed{3T = 2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{3} \cdot k}$ $k \in \mathbb{Z}$

e dunque $\operatorname{sen} 3x$ è $\boxed{\frac{2\pi}{3} \text{ periodica}}$ e $\frac{2\pi}{3}$ è il periodo minimo ■

Se f è periodica di periodo T, ho che:

$\forall x \in A$, $f(x+T) = f(x)$

$x' = x+T$ ①

$f(x'+T) = f(x')$

$f((x+T)+T) = f(x+2T) = f(x+T)$

$= f(x)$

$x'' = x'+T$

7

Esercizio la f.ne $f(x) = \operatorname{sen} 6x + \cos 3x$ è periodica? Nel caso lo sia, ha minimo periodo?

$\operatorname{sen} 6x$ $\quad T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

dim È periodica di periodo 2π infatti $f(x+2\pi) = \operatorname{sen}(6x + 12\pi) + \cos(3x + 6\pi) = f(x)$ in quanto $\operatorname{sen} y$ e $\cos y$ sono 2π-periodiche (e quindi 12π e 6π periodiche rispettivamente. Cerchiamo, se esiste, il minimo periodo T.

$\cos 3x$ $\quad T_2 = \frac{2\pi}{3}$

$$f(x+T) = \operatorname{sen} 6x \cos 6T + \operatorname{sen} 6T \cos 6x + \cos 3x \cos 3T - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3T = \operatorname{sen} 6x + \cos 3x$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \ \operatorname{sen} 6x(\cos 6T - 1) + \operatorname{sen} 6T \cos 6x + \cos 3x(\cos 3T - 1) - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3T = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos 6T = 1 \\ \operatorname{sen} 6T = 0 \\ \cos 3T = 1 \\ \operatorname{sen} 3T = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6T = 2k\pi \\ 6T = k\pi \\ 3T = 2k\pi \\ 3T = k\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} T = k \cdot \frac{\pi}{3} \\ T = k \cdot \frac{\pi}{6} \\ T = k \frac{2}{3}\pi \\ T = k \cdot \frac{\pi}{3} \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3 \dots$$

$\Rightarrow T = \max\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right\} = \frac{2}{3}\pi$ è il minimo periodo ▥

specie di m.c.m.

Oss: Alternativamente potevo osservare che $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x \cos 3x + \cos 3x$ prostaferesi e che $\operatorname{sen} 3x, \cos 3x$ hanno entrambe periodo $\frac{2}{3}\pi$

$T = \frac{2\pi}{3}$

Esercizio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T periodica
$\Rightarrow g(x) = f(3x)$ è $T/3$ periodica
$g(x) = f(x/3)$ è $3T$ periodica

Esercizio $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f T periodica e g T/k periodica (con $k \geq 2$ $k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow f+g$ è $T = \max\{T, T/k\}$ periodica

più difficile il seguente

Teorema $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f $\frac{p}{q}$-periodica g $\frac{\ell}{m}$-periodica
$\Rightarrow f+g$ è $p \cdot \ell$ periodica

dim il periodo di $f+g$ deve necessariamente essere multiplo di $\frac{p}{q}$ e di $\frac{\ell}{m}$, ovvero
" " $\frac{pm}{qm}$ e di $\frac{\ell q}{mq}$ ovvero (non voglio il minimo)

$$\text{mcm}\left[\frac{pm}{qm}, \frac{\ell q}{qm}\right] = \frac{pm\ell q}{qm} = p \cdot \ell$$ ▥

NOTA BENE: quando il rapporto dei periodi NON è razionale, questo non vale più

Osservazione f è $\sqrt{2}$-periodica, g è 2-periodica ma $f+g$ <u>non</u> è periodica; il problema è il seguente: il rapporto tra $T_1=\sqrt{2}$ e $T_2=2$ NON è razionale

Osservazione il minimo periodo non sempre esiste

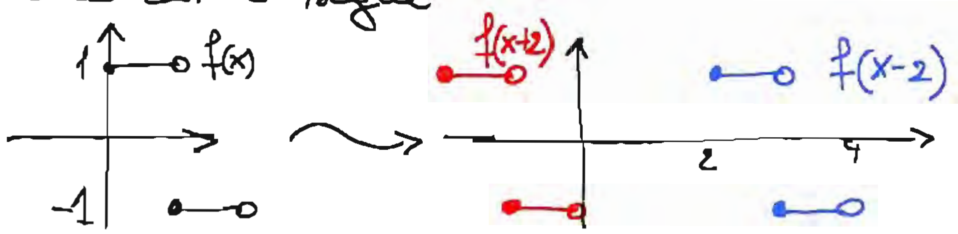
$$T = \inf\{P>0 : f(x+P)=f(x)\ \forall x\in dom(f)\}$$

↑ questo è il minimo periodo

$f(x)=3$ $\forall x\in\mathbb{R}$ f.ne costante, questa è P-periodica, $\forall P>0$

e dunque $T=$ min periodo $=0$ che non è accettabile e dunque non esiste sempre

Esempio Data una funzione $f:[0,2[\ \to\mathbb{R}$, possiamo generare una funzione periodica definita su $\mathbb{R}$ procedendo come segue



m.c.m. $(10,6)=30$

$$\phi(x)=\begin{cases} \dots \\ f(x+2) & -2\le x<0 \\ f(x) & 0\le x<2 \\ f(x-2) & 2\le x<4 \\ \dots \end{cases} = \begin{cases} f(x-2k), \\ \forall x\in[2k,2k+2[\\ \text{al variare di } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$\dfrac{30\pi}{15} = 2\pi$

Problema f e g di periodo T (minimo) $\Rightarrow \frac{f}{g}$ ha periodo T (minimo)?

No: $f=\operatorname{sen} x$, $g=\cos x$ hanno periodo 2π ma $\frac{f}{g}$ ha periodo π

$= \dfrac{6\pi}{15}$

Problema f di periodo T (minimo) $\Rightarrow |f|$ ha periodo T (minimo)?

No: $f=\operatorname{sen} x$ ha periodo 2π ma $|f|$ ha periodo π

$\operatorname{sen} 5x$ $\quad T_1=\dfrac{2\pi}{5}$

$\cos 3x$

Esercizio Determinare il minimo periodo di $f(x)=\operatorname{sen}5x+\cos 3x$

R: $\text{mcm}\left(\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{3}\right)=\text{mcm}\left(\frac{6}{15}\pi,\frac{10}{15}\pi\right)=\frac{60}{15}\pi=4\pi=T$ minimo $\quad \dfrac{10\pi}{15} = T_2=\dfrac{2\pi}{3}$

Esercizio 1.28 : trovate il dominio naturale delle seguenti funzioni (eventualmente dopo la lettura del capitolo 3):

a) $\sqrt{x-2}$ d) $\sqrt{\log x + 1}$
b) $\sqrt{|x-2|}$ e) $\log(\sqrt{x^2-6x-5})$
c) $\sqrt{|x|-2}$ f) $\operatorname{sen}(x-\sqrt{1-2x})$

a) $f(y)=\sqrt{y}$ ha come dominio l'insieme $[0,+\infty[\,=B$
$g(x)=x-2$ " " " " $\mathbb{R}=A$
$\sqrt{x-2}=f(g(x))=h(x)$ $A\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ $B\xrightarrow{f}\mathbb{R}$
Il dominio di $h\equiv g^{-1}(B)=\{x\in A : g(x)\geq 0\}$
$=\{x\in\mathbb{R} : x-2\geq 0\}$
$=[2,+\infty[$

b) $f(y)=\sqrt{y}$ $f: B\to\mathbb{R}$ $B=[0,+\infty[$
$g(x)=|x-2|$ $g: A\to\mathbb{R}$ $A=\mathbb{R}$
$h(x)=f(g(x))=(f\circ g)(x)$
Il dominio di $h\equiv g^{-1}(B)=\{x\in A : g(x)\geq 0\}$
$=\{x\in\mathbb{R} : |x-2|\geq 0\}\equiv\mathbb{R}$

c) $f(y)=\sqrt{y}$ $f: B\to\mathbb{R}$ $B=[0,+\infty[$
$g(x)=|x|-2$ $g: A\to\mathbb{R}$ $A=\mathbb{R}$
$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{|x|-2}$
il dominio di $h\equiv g^{-1}(B)=\{x\in A : g(x)\geq 0\}$
$=\{x\in\mathbb{R} : |x|-2\geq 0\}$
$=\{\ " \ : |x|\geq 2\}$
$=]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

d) $f(y)=\sqrt{y}$ $f: B\to\mathbb{R}$ $B=[0,+\infty[$
$g(x)=1+\log x$ $g: A\to\mathbb{R}$ $A=]0,+\infty[$

$h(x)=\sqrt{1+\log x}=f(g(x))$
il dominio di $h\equiv g^{-1}(B)=\{x\in A : g(x)\geq 0\}$
$=\{x\in]0,+\infty[: 1+\log x\geq 0\}$
$=\{x\in]0,+\infty[: \log x\geq -1=\log\frac{1}{e}\}$
$=\{x\in]0,+\infty[: x\geq\frac{1}{e}\}$
$=[\frac{1}{e},+\infty[$

e) $q(x) = \log\left(\sqrt{x^2-6x+5}\right) = f(g(h(x)))$

$h(x) = x^2-6x+5$ $\qquad h : A \to \mathbb{R} \quad A = \mathbb{R}$

$g(y) = \sqrt{y}$ $\qquad g : B \to \mathbb{R} \quad B = [0,+\infty[$

$f(z) = \log(z)$ $\qquad f : C \to \mathbb{R} \quad C =]0,+\infty[$

$A \xrightarrow{h} \mathbb{R} \qquad B \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad C \xrightarrow{h} \mathbb{R}$

il dominio di $q(x) = \{x \in A : g(h(x)) > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2-6x+5} > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2-6x+5 > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-5) > 0\}$

$=]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$

f) $\operatorname{sen}\left(x - \sqrt{1-2x}\right) = q(x) = h(g(x) - f(p(x)))$

$f(y) = \sqrt{y} \quad g(x) = x \quad p(x) = 1-2x$

dom $q = \{x \in \mathbb{R} : g(x) - f(p(x)) \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : f(p(x)) \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : 1-2x \geq 0\}$

$= \{ \;\text{"}\; : \tfrac{1}{2} \geq x \} =]-\infty, \tfrac{1}{2}]$

Esercizio 3.3 : negate la proposizione "f è decrescente" debolmente

dim Bisogna scrivere in altro modo

non ($f : A \to \mathbb{R}$ debolmente decrescente)

non ($\forall x,y \in A,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$)

non ($\forall x,y \in A,\ x \geq y$ o $f(x) \geq f(y)$)

$\exists \bar{x}, \bar{y} \in A$: non ($x \geq y$ o $f(x) \geq f(y)$)

$\exists \bar{x}, \bar{y} \in A$: $x < y$ e $f(x) < f(y)$

Esercizio 3.4 : negate la proposizione "f è strettamente monotona".

dim Bisogna scrivere in modo diverso

non ($f : A \to B$ è strettamente monotona)

non ($f : A \to B$ è (strett. crescente) o (strettamente decrescente))

[non (f strett. crescente)] e [non (f strett. crescente)] decrescente

$\left[\text{non}\left(\forall x,y\in A\ \ x<y \Rightarrow f(x)<f(y)\right)\right]$ e $\left[\text{non}\left(\forall x,y\in A\ \ x<y \Rightarrow f(x)>f(y)\right)\right]$ 11

$\left[\exists \bar{x},\bar{y}\in A : \bar{x}<\bar{y} \text{ e } f(\bar{x})\geq f(\bar{y})\right]$ e $\left[\exists \tilde{x},\tilde{y}\in A : \tilde{x}<\tilde{y} \text{ e } f(\tilde{x})\leq f(\tilde{y})\right]$ ∎

Esercizio 3.6 : provate, con degli esempi, che la somma di due funzioni iniettive non sempre è iniettiva e che lo stesso vale per la somma di due funzioni surgettive o due biunivoche (questo mostra l'importanza della proposizione 3.1)

Prop. 3.1 "$f: A\to B$ strett. monotona $\Rightarrow f$ iniettiva"

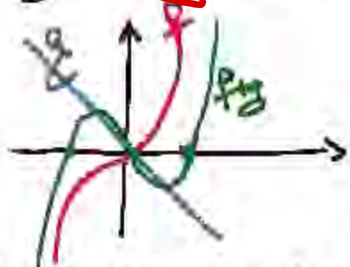
Proviamo che (la prop. 3.1 non si inverte!)

$f,g: A\to B$ iniettive $\not\Rightarrow f+g: A\to B$ iniettiva

$f(x)=x^3$ $g(x)=-x$ sono iniettive da $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ma

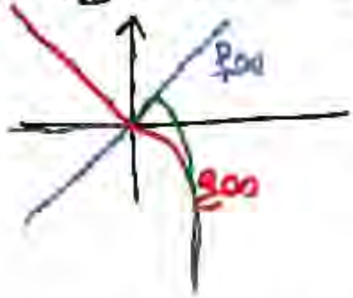
$\boxed{f+g = x^3-x}$ NON È INIETTIVA: infatti $(f+g)(1)=0=(f+g)(-1)$



$f,g: A\to B$ suriettive $\not\Rightarrow f+g: A\to B$ suriettiva

$f(x)= x$

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x<0 \\ -x^2 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$



$$f+g = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ x-x^2 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$ che non è suriettiva poiché $x-x^2<2 \ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$f,g: A\to B$ biettive $\not\Rightarrow f+g: A\to B$ BIETTIVA

Esempio $f(x)=x$ è biettiva da $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$g(x)=3-x$ biettiva " $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ma $f+g=3$ che NON È BIETTIVA (è costante!)

Esercizio 3.8 : quali sono le funzioni che sono contemporaneamente debolmente crescenti e debolmente decrescenti?

dim $f: A \to \mathbb{R}$ deve essere tale che

$\forall x,y \in A, [x<y \Rightarrow f(x) \le f(y)]$ e $[x<y \Rightarrow f(x) \ge f(y)]$

ovvero

$\forall x,y \in A, [x<y \Rightarrow (f(x)\le f(y)$ e $f(x)\ge f(y))]$

ovvero

$\forall x,y\in A, [x<y \Rightarrow f(x)=f(y)]$

ovvero le costanti ∎

Esercizio 3.11 : provate che una funzione è dispari se e solo se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Trovate poi le funzioni pari e dispari tra quelle disegnate nella sezione 4.2.

dim Dovendo essere $-f(x)=f(-x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ si ha che $(x,f(x))\in \mathcal{G}(f)$ sse $(-x,-f(x))\in\mathcal{G}(f)$

Esercizio 3.12 : dite se la funzione $\arctan(2x - x^3)$ è pari o se è dispari.

$f(x)=\mathrm{arctg}(2x-x^3)$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(0)=0$

$f(-x) = \mathrm{arctg}(2(-x)-(-x)^3) = \mathrm{arctg}(-(2x-x^3))$

↓ sfrutto la disparità dell'arctg

$= -\mathrm{arctg}(2x-x^3) = -f(x)$

Si è utilizzato il fatto che $g(y)=\mathrm{arctg}(y)$ è dispari! ∎

Esercizio 3.34 : provate che una funzione periodica non è mai iniettiva.

dim

Prendendo come riferimento $f(x) = \mathrm{sen}\, x$, si vede che

$\mathrm{sen}\, x = k$ con $k\in[-1,1]$ ha ∞ soluzioni in quanto

se θ: $\mathrm{sen}\,\theta=k$ allora $\mathrm{sen}(\theta+2h\pi)=k$ $\forall h\in\mathbb{Z}$

e dunque non può essere iniettiva

IN GENERALE sia data $f(x)$ periodica, ovvero

$\exists T>0 : f(x+T\cdot h) = f(x) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$

Se $f(x)=k$ allora $f(x+hT) = f(x) = k \quad \forall h \in \mathbb{Z}$

da cui segue che f NON È INIETTIVA

Esercizio 4.6 : determinate graficamente l'immagine della seguente funzione:

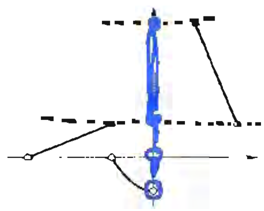


Fig. 4.56 : un grafico di funzione

Prendiamo $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{3}{2} & -3<x\leq -1 \\ x^2-1 & -1<x<0 \\ 5-x & 1\leq x<4 \end{cases}$

$f(]-3,0[\cup [1,4[) =]-1,0[\cup]0,1] \cup]1,4]$

$=]-1,0[\cup]0,4]$

Parabola e disequazioni di 2° grado

Conviene far osservare che l'equazione di 2° grado

(*) $x^2 + c = 0 \iff x^2 = -c \iff x_{1,2} = \sqrt{-c}$ che ha soluzioni se $c \leq 0$

L'equazione $ax^2+bx+c=0$ si può scrivere

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

e quindi ha le stesse soluzioni di

$$(**)\quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Per risolvere (**) mi riconduco a (*) e quindi

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

(completamento del Trinomio) e quindi

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{|2a|}\sqrt{b^2-4ac} \qquad (\text{ma } \pm|2a|=\pm 2a)$$

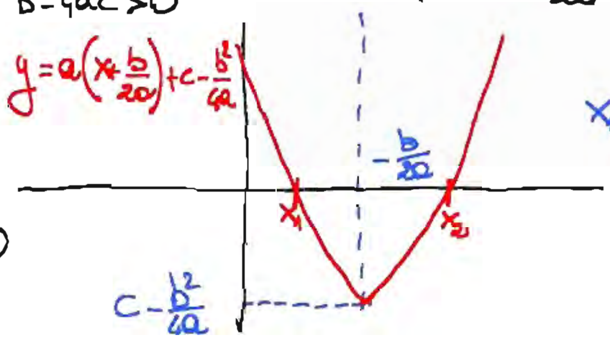
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ e questa ha soluzioni

① $\neq$ se $b^2>4ac$ ② $=$ se $b^2=4ac$ ③ complesse coniugate se $b^2<4ac$

Data la parabola $y=ax^2+bx+c$, questa si scrive

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

Ⓐ Nel caso $\begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac>0 \end{cases}$ (ed ho posto $\frac{b}{2a}<0$)



$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

si ha

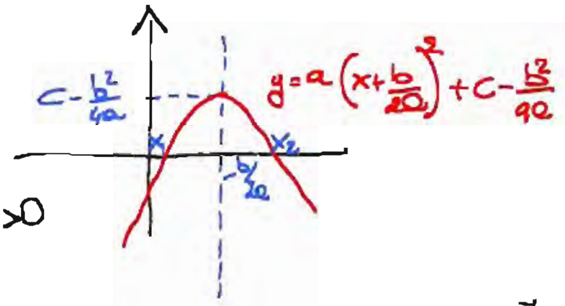
$$-\frac{b^2-4ac}{4a}=c-\frac{b^2}{4a}<0$$

e dunque si scopre che $y(x) \begin{cases} >0 & x \notin [x_1, x_2] \\ <0 & x \in]x_1, x_2[\end{cases}$

Ⓑ Nel caso $\begin{cases} a<0 \\ b^2-4ac>0 \end{cases}$ il disegno è $\left(\frac{b}{2a}<0\right)$

si ha

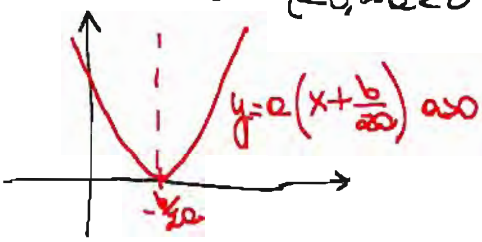
$\frac{4ac-b^2}{4a} = c - \frac{b^2}{4a} > 0$

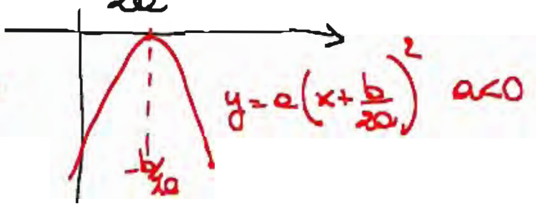


e dunque scopro $y(x) \begin{cases} >0 & x \in]x_1, x_2[\\ <0 & x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$

Ⓒ Quando $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ si ha $y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ e

si ha che $y(x) \begin{cases} >0, \text{ se } a>0 & \forall x \neq -\frac{b}{2a} \\ <0, \text{ se } a<0 & \forall x \neq -\frac{b}{2a} \end{cases}$

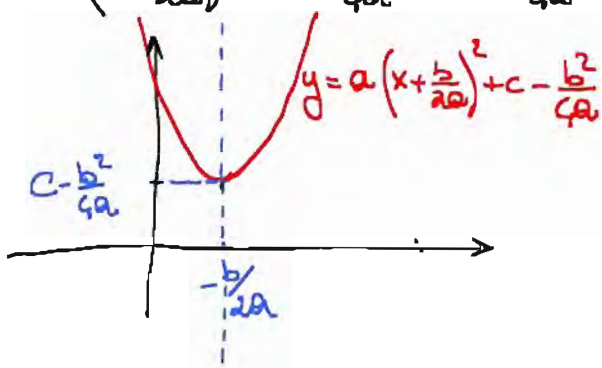




3) Quando $\begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases} \Rightarrow c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a} > 0$

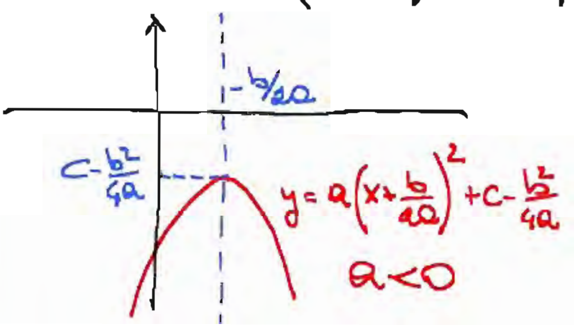
$\Rightarrow y(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \geq c - \frac{b^2}{4a} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

disegno

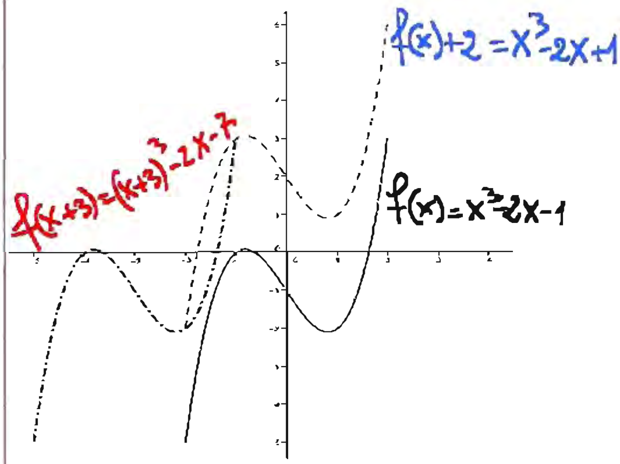


3) Quando $\begin{cases} a<0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases} \Rightarrow c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a} < 0$

$\Rightarrow y(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \leq c - \frac{b^2}{4a} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

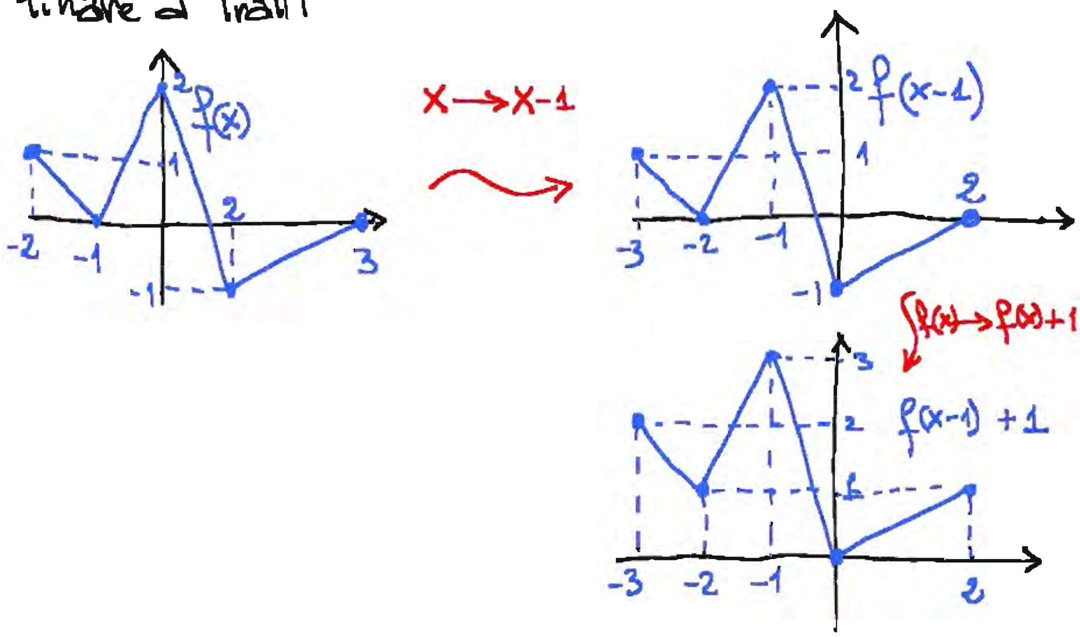


Traslazione verticale e orizzontale

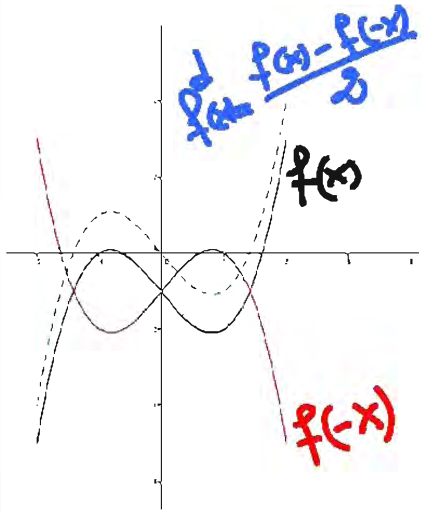


Chiarire bene come si passa da $f(x)$ alla funzione $f(x)+k$ $k\in\mathbb{R}$ alla funzione $f(x+h)$ $h\in\mathbb{R}$

L'esempio più semplice è forse con una funzione lineare a tratti



Costruzione della disparizzata $f^d(x)$

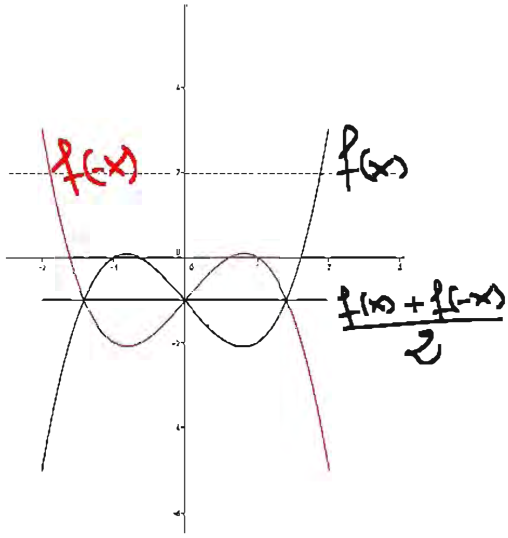


In questa figura si vede l'andamento di

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

insieme agli andamenti di $f(x)$ e di $f(-x)$

Costruzione della parizzata $f^p(x)$



Andamento di

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

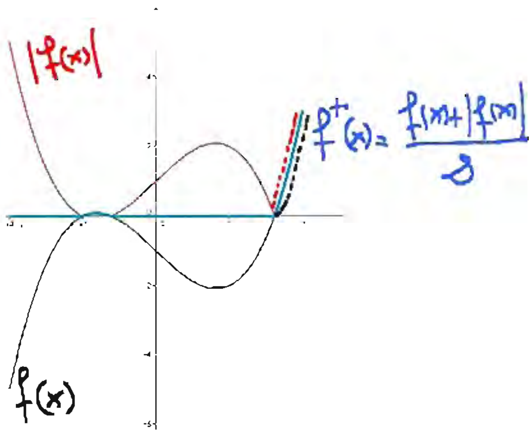
Problema: quale è il grafico di $(f(x)+f(-x))\cdot\frac{1}{2}$

- quando $f(x)$ è pari?
- quando $f(x)$ è dispari?

Problema: quale è il grafico di $(f(x)-f(-x))\cdot\frac{1}{2}$

- quando $f(x)$ è pari?
- quando $f(x)$ è dispari?

Costruzione della parte positiva $f^+(x)$



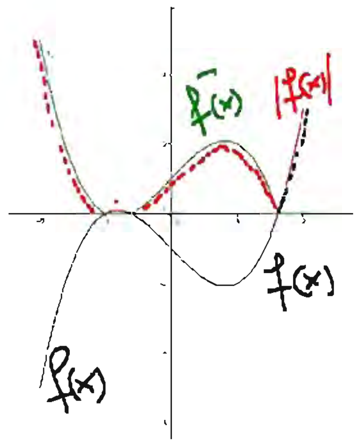
Questo è il grafico della parte positiva

$$f^+(x) = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}$$

Si osservi che

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

Costruzione della parte negativa $f^-(x)$



Questo è il grafico della parte negativa di f

$$f^-(x) = \frac{f(x)-|f(x)|}{2}$$

Si osservi che

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$