4° INCONTRO

FUNZIONI

Che cosa è una funzione?

E’ una relazione tra due insiemi tale che ad ogni elemento dell’insieme di partenza corrisponde al più un elemento dell’insieme di arrivo.

$$f: A \to B \text{ è così definita: } \forall x \in A, \exists!\, y \in B \text{ t.c. } f(x) = y$$

Criterio grafico

Funzione iniettiva/suriettiva/biunivoca

Funzione iniettiva:

$$\forall a_1, a_2 \in A, \text{ tali che } a_1 \neq a_2 \;\Rightarrow\; f(a_1) \neq f(a_2)$$

Funzione suriettiva:

$$f \text{ é suriettiva sse } Im(f) = B$$

Funzione biiettiva: se è sia iniettiva che suriettiva

Criterio grafico

Definizione di grafico di funzione

Data una funzione $f: A \to B$, il grafico della funzione $G(f) = \{(x, f(x): x \in A\}$

$G(f)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

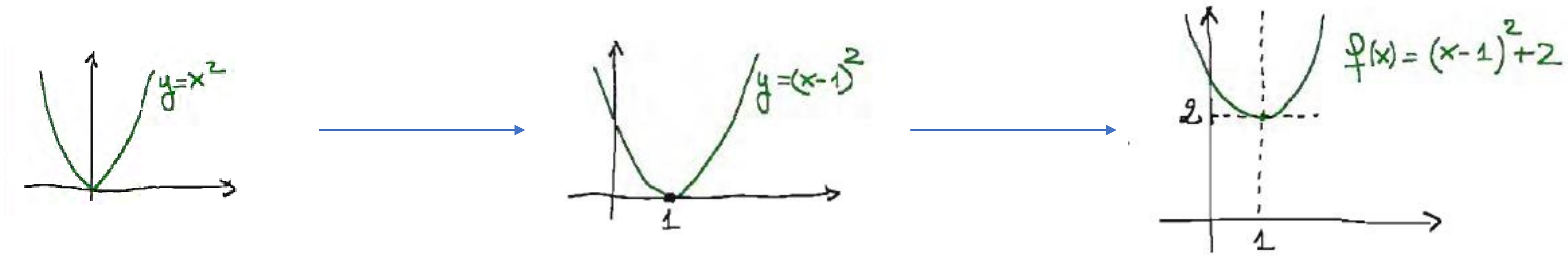
Esempio

Data la funzione $f(x) = x^2 - 2x + 3$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$, questa si può scrivere come:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 + 2$$

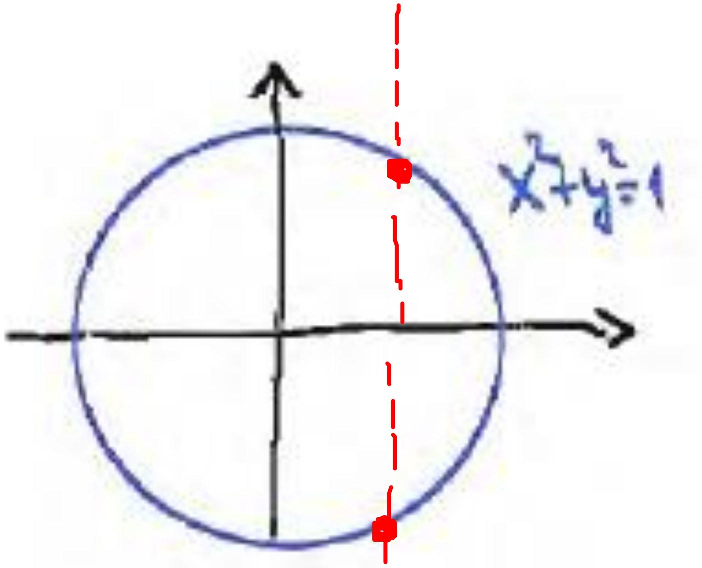
$$f(x) = (x - 1)^2 + 2$$

Si può quindi disegnare il grafico:



Controesempio

Attenzione che l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} : \; x^2 + y^2 = 1\}$ NON è grafico di una funzione.



Si nota, infatti, che dato un certo valore di x, si ottengono anche due valori di y distinti.

Dominio di funzione dal grafico

Il dominio di una funzione (o campo di esistenza) è l’insieme dove questa ha senso.

Il dominio massimale di una funzione reale è $\mathbb{R}$

Calcolo analitico del dominio

Calcolo grafico del dominio

Calcolo grafico del codominio

Funzioni debolmente/strettamente crescente

Una funzione si dice DEBOLMENTE crescente quando:

$$f : A \to B : \forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Una funzione si dice STRETTAMENTE crescente quando:

$$f : A \to B : \forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Esempio

$f(x) = x^3$ è strettamente crescente.

Prendo due valori $x_1 e\ x_2$ e suppongo $f(x_1) < f(x_2)$

$$f(x_1) = x_1^3$$

$$f(x_2) = x_2^3$$

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 < 0$$

Scompongo $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$

$$\downarrow$$

$(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$

È un falso quadrato! Pertanto sempre strettamente maggiore di zero.

Quindi $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) < 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2) < 0$

Quindi $x_1 < x_2$

Funzioni debolmente/strettamente decrescente

Una funzione si dice DEBOLMENTE decrescente quando:

$$f: A \to B: \ \forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

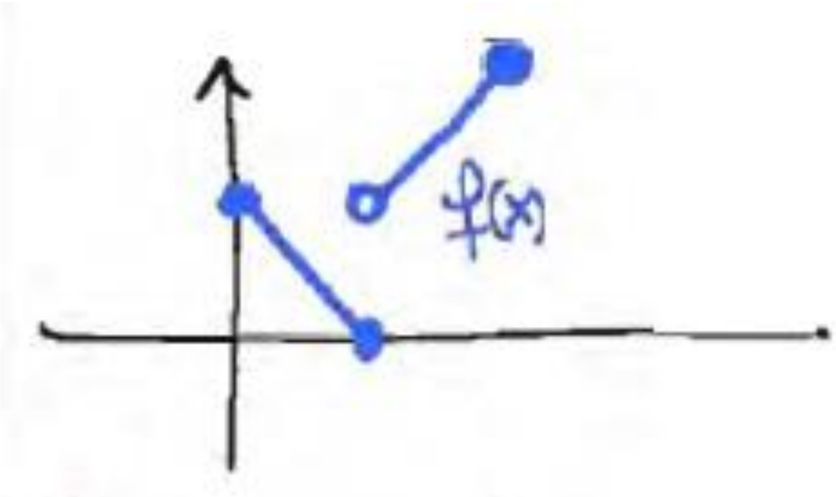
Una funzione si dice STRETTAMENTE crescente quando:

$$f: A \to B: \ \forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Funzione iniettiva

Data $f: A \rightarrow B$ strettamente crescente (decrescente) $\Rightarrow$ f è iniettiva

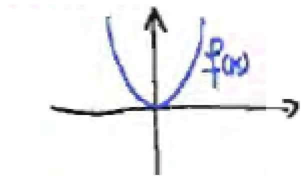
Attenzione che il contrario: f è iniettiva$\Rightarrow$ $f: A \rightarrow B$ strettamente crescente (decrescente) non è sempre vero!



Funzione pari/dispari

Una funzione si dice pari se il suo grafico è simmetrico rispetto all’asse y:

$$f(x) = f(-x)$$



Una funzione si dice dispari se il suo grafico è simmetrico rispetto all’origine:

$$-f(x) = f(-x)$$

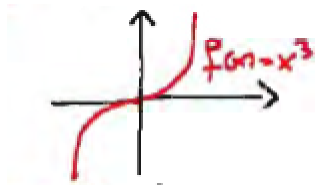
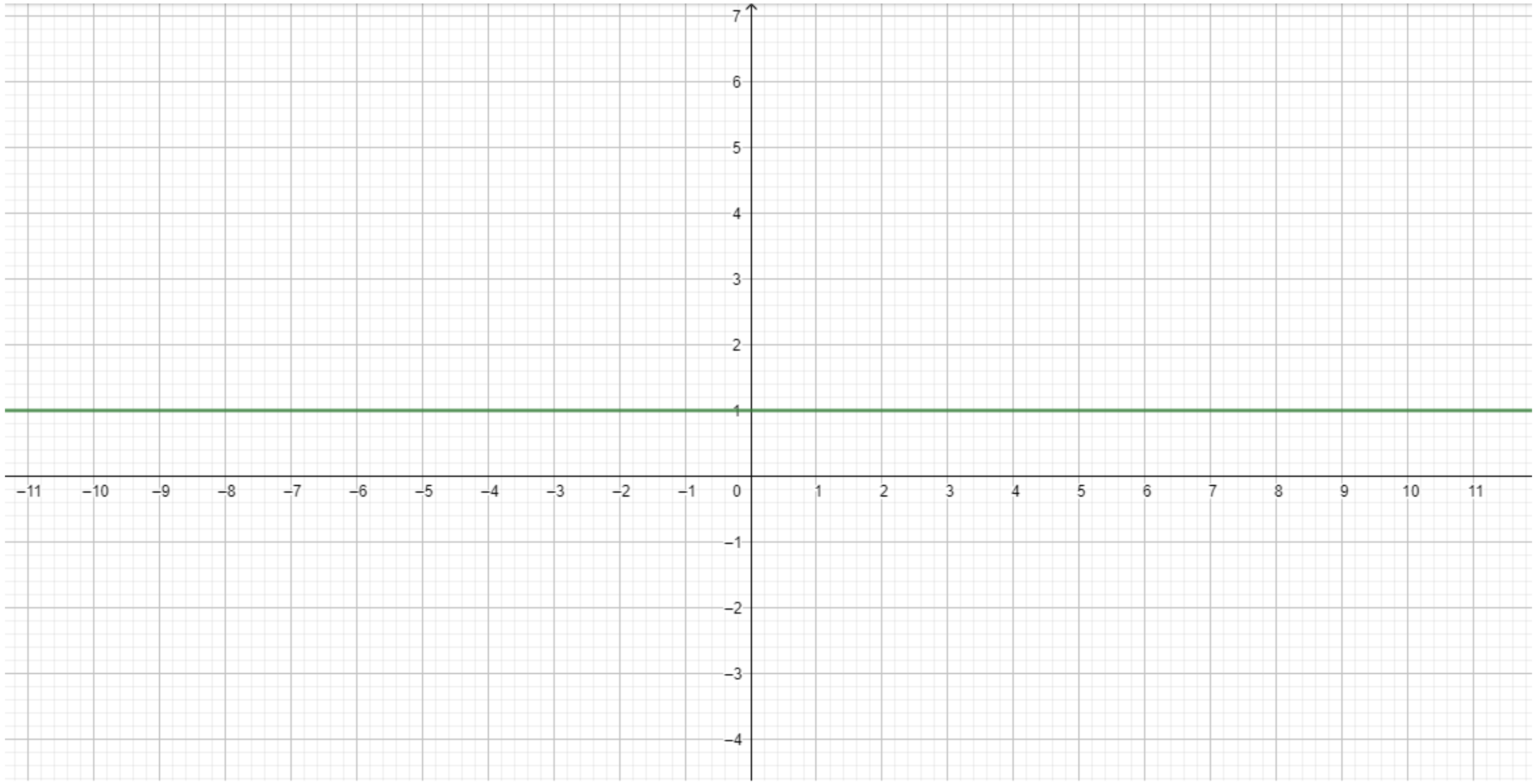


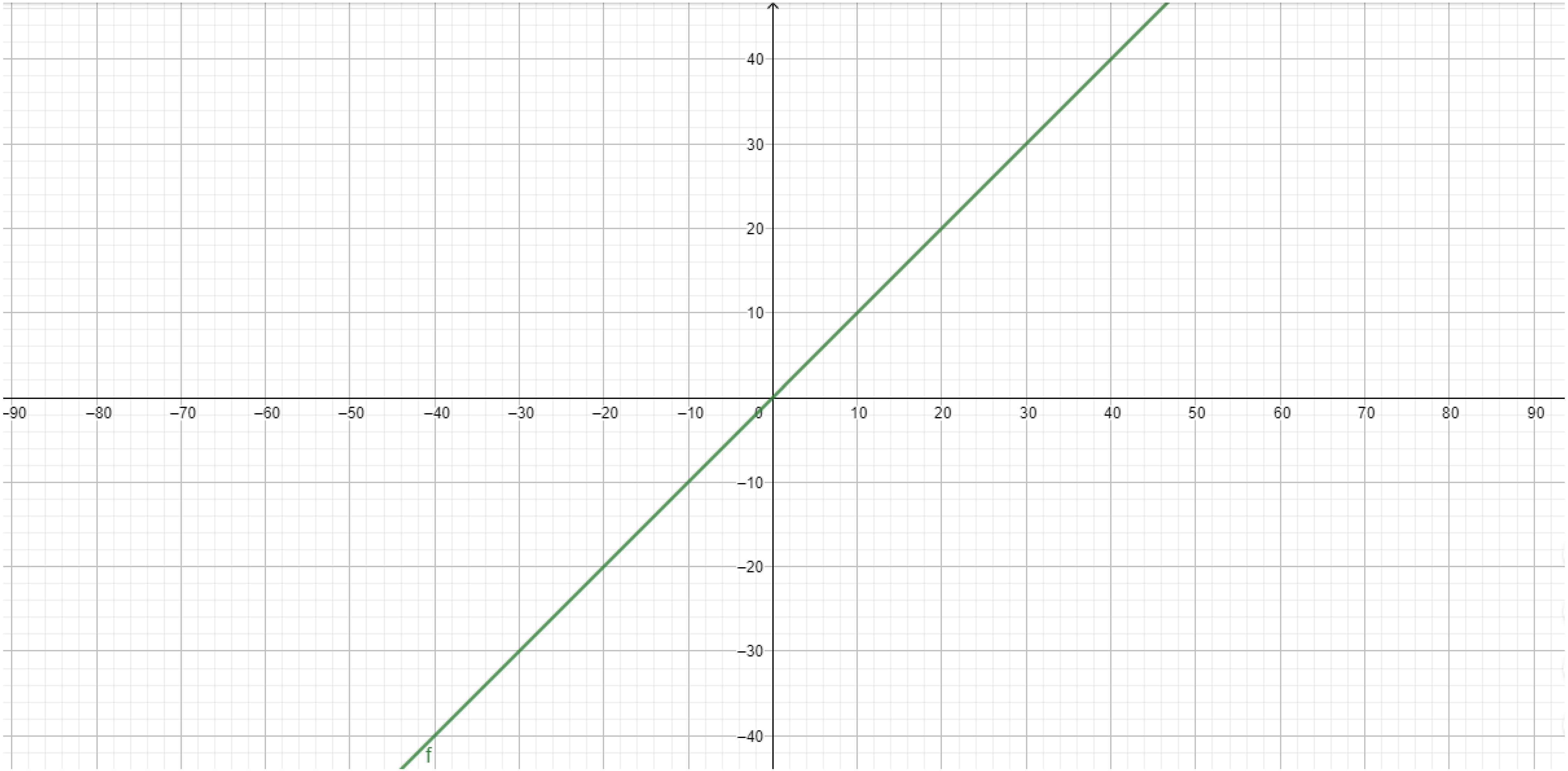
Grafico di funzione potenza (polinomi)

$$y = x^0 = 1$$

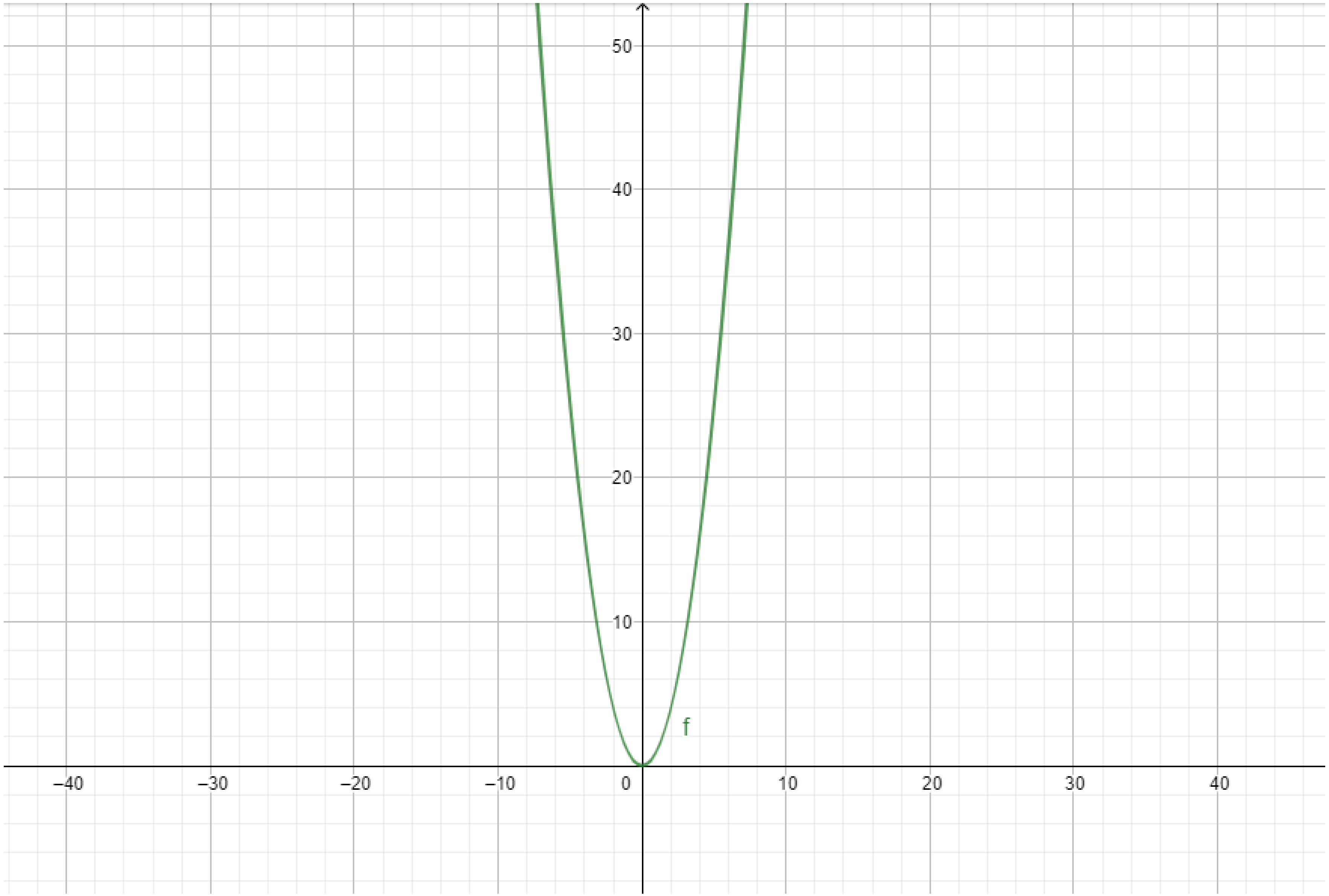


Funzione lineare - RETTA

$$y = x$$

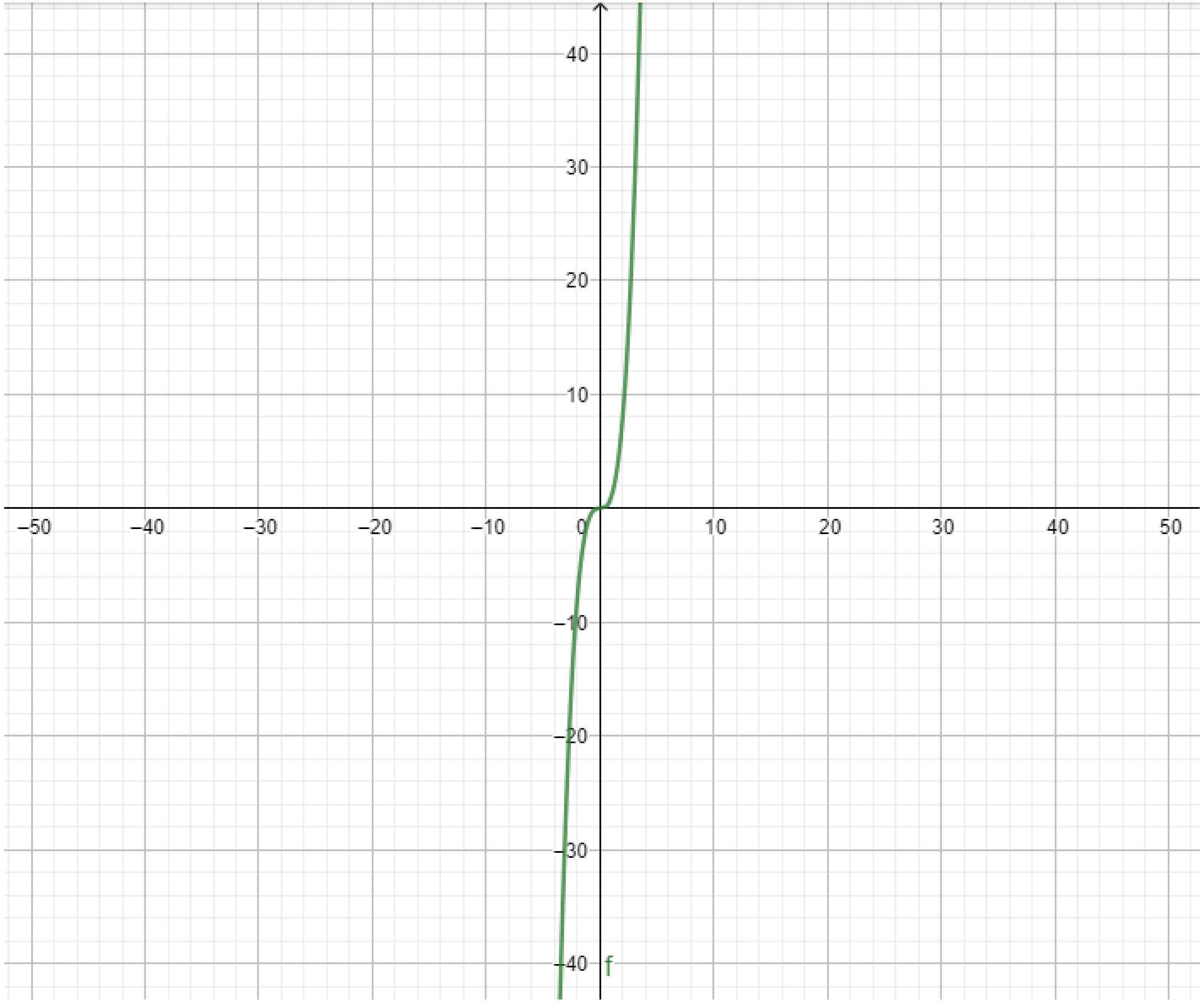


Funzione quadratica - PARABOLA $y = x^2$



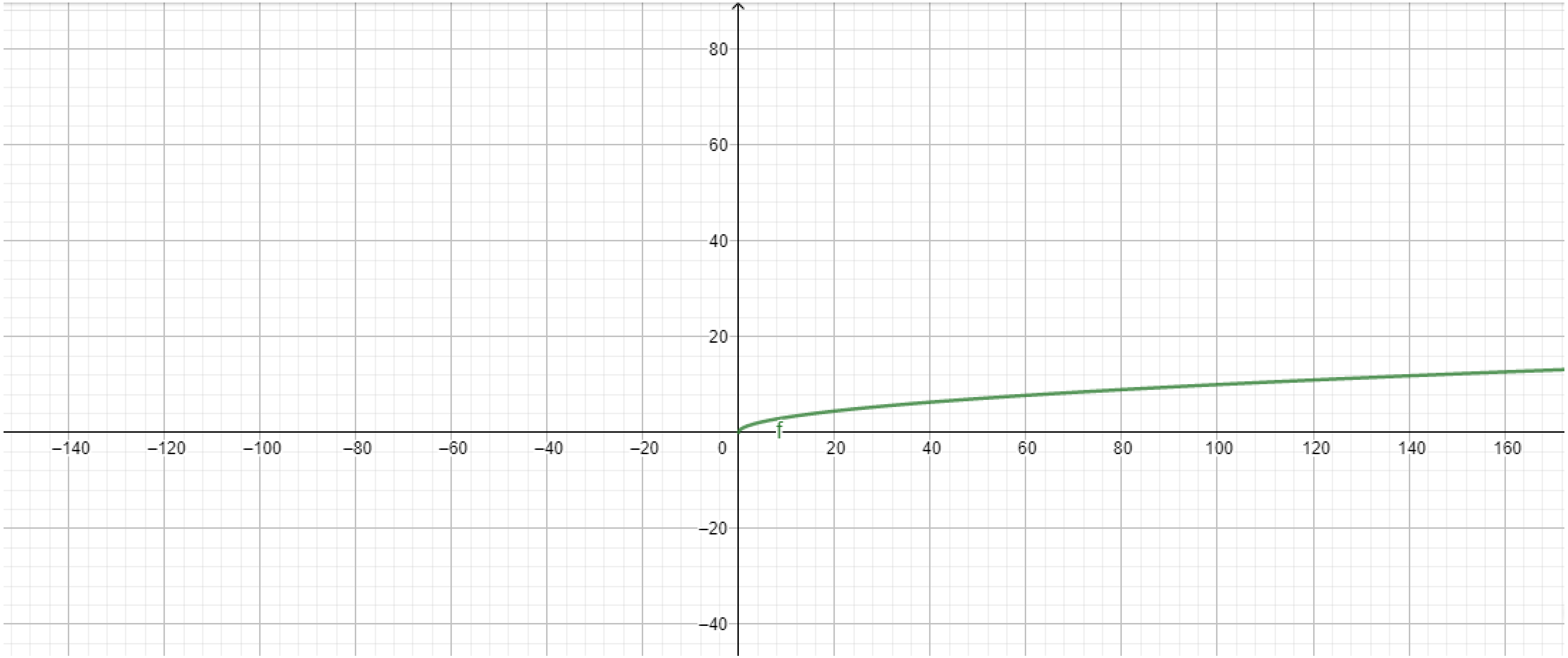
Funzione cubica

$$y = x^3$$

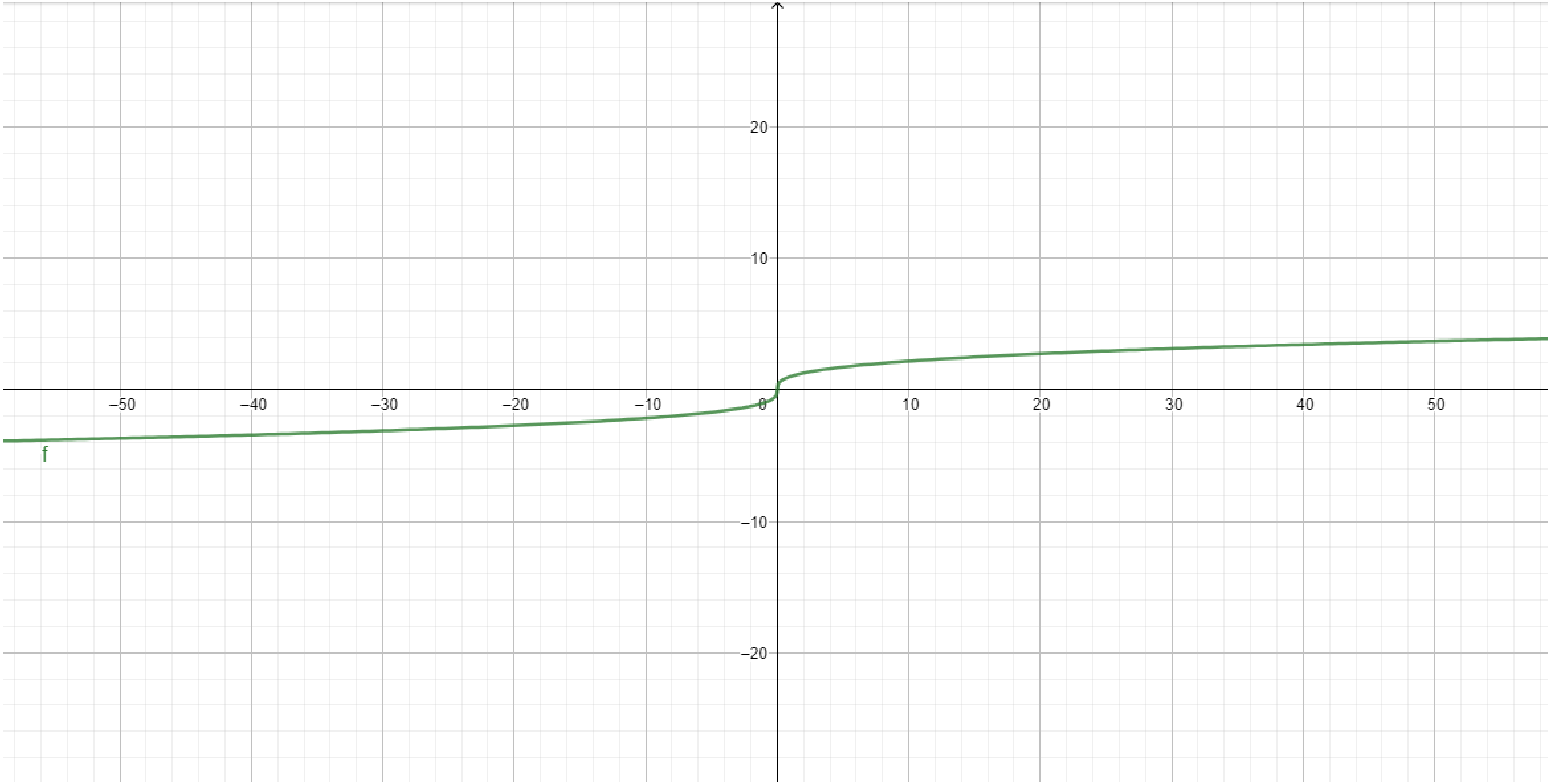


Funzioni radici

$$y = \sqrt[2]{x}$$

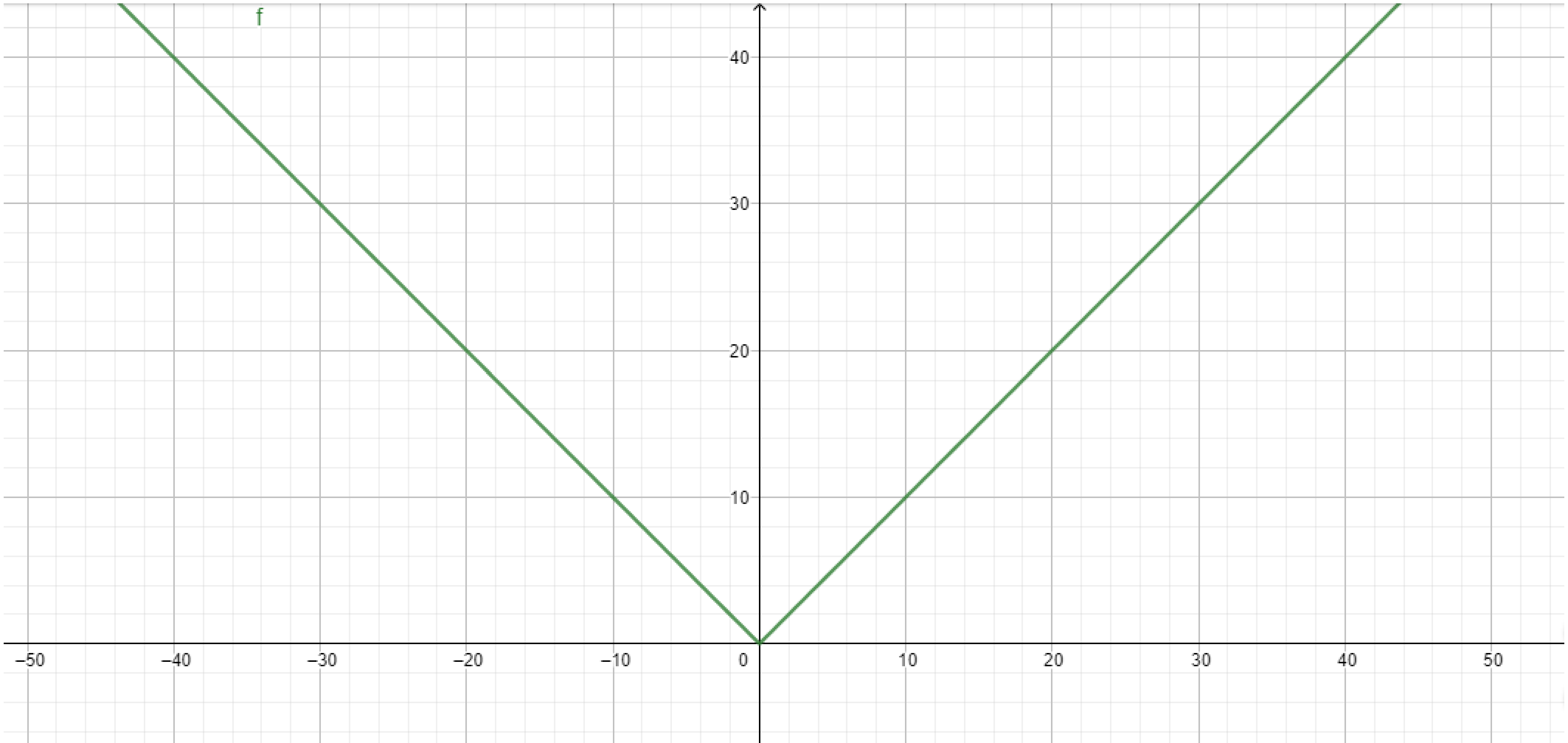


$$y = \sqrt[3]{x}$$



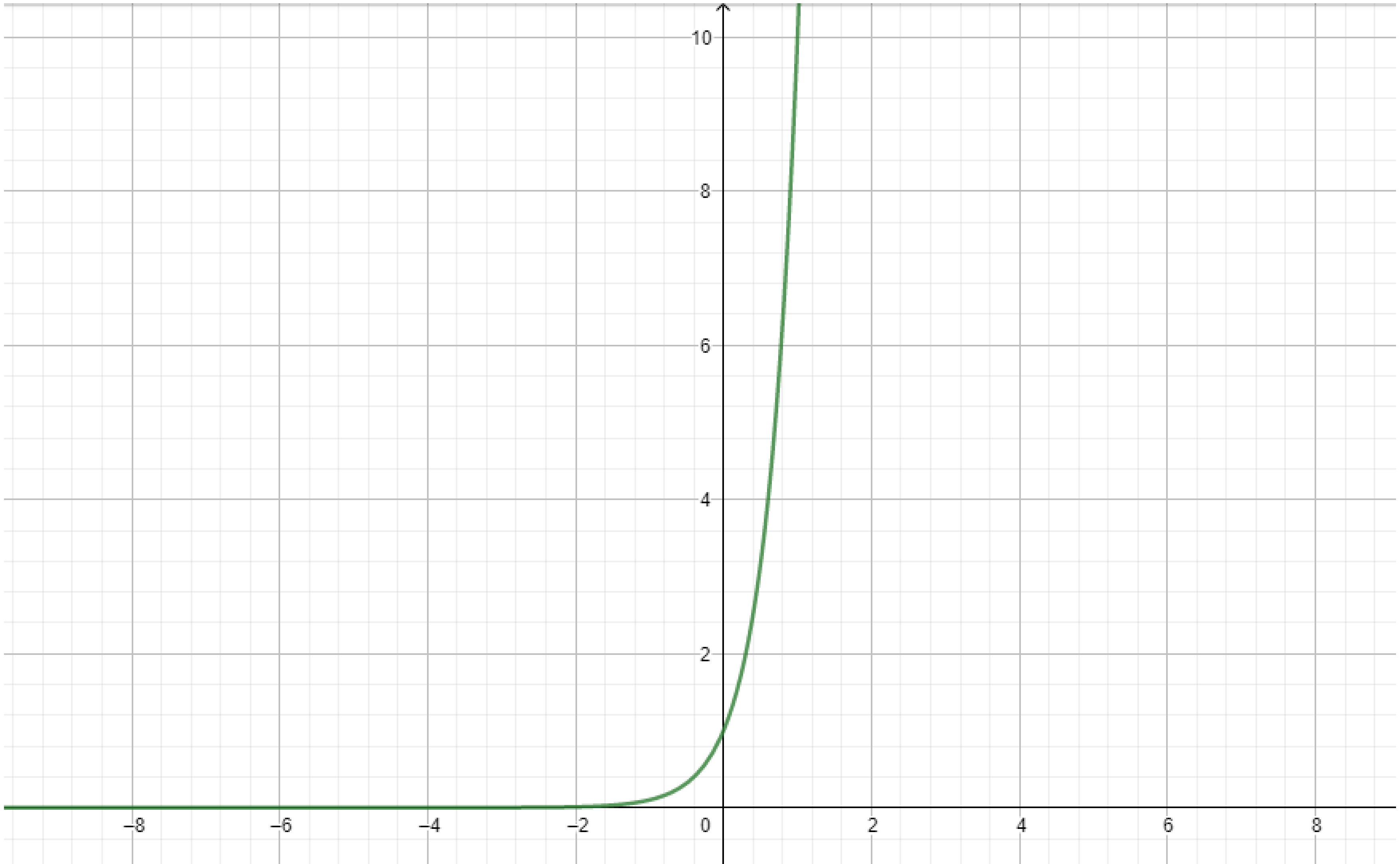
Funzione valore assoluto

$$y = |x|$$

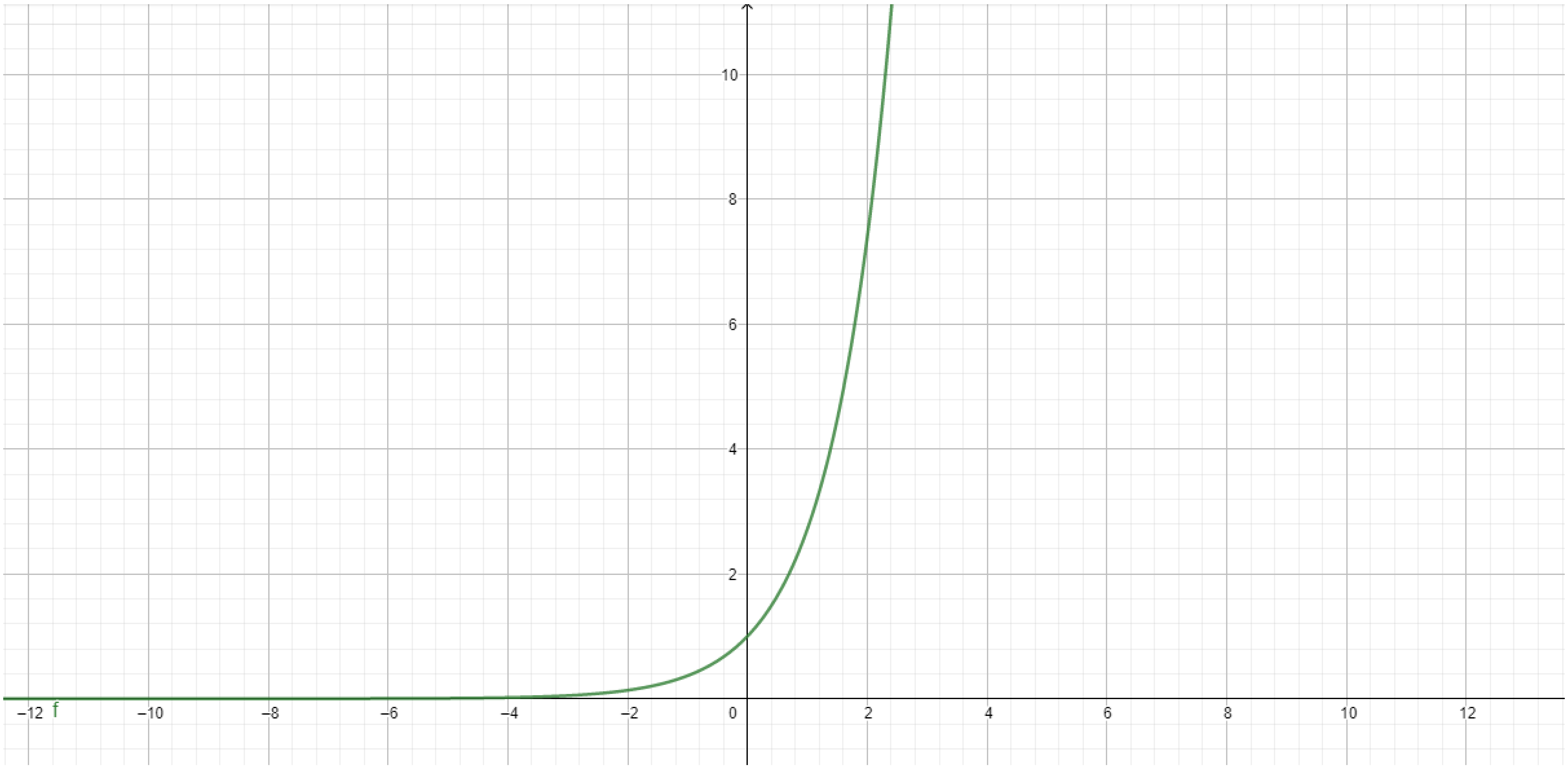


Funzioni esponenziali

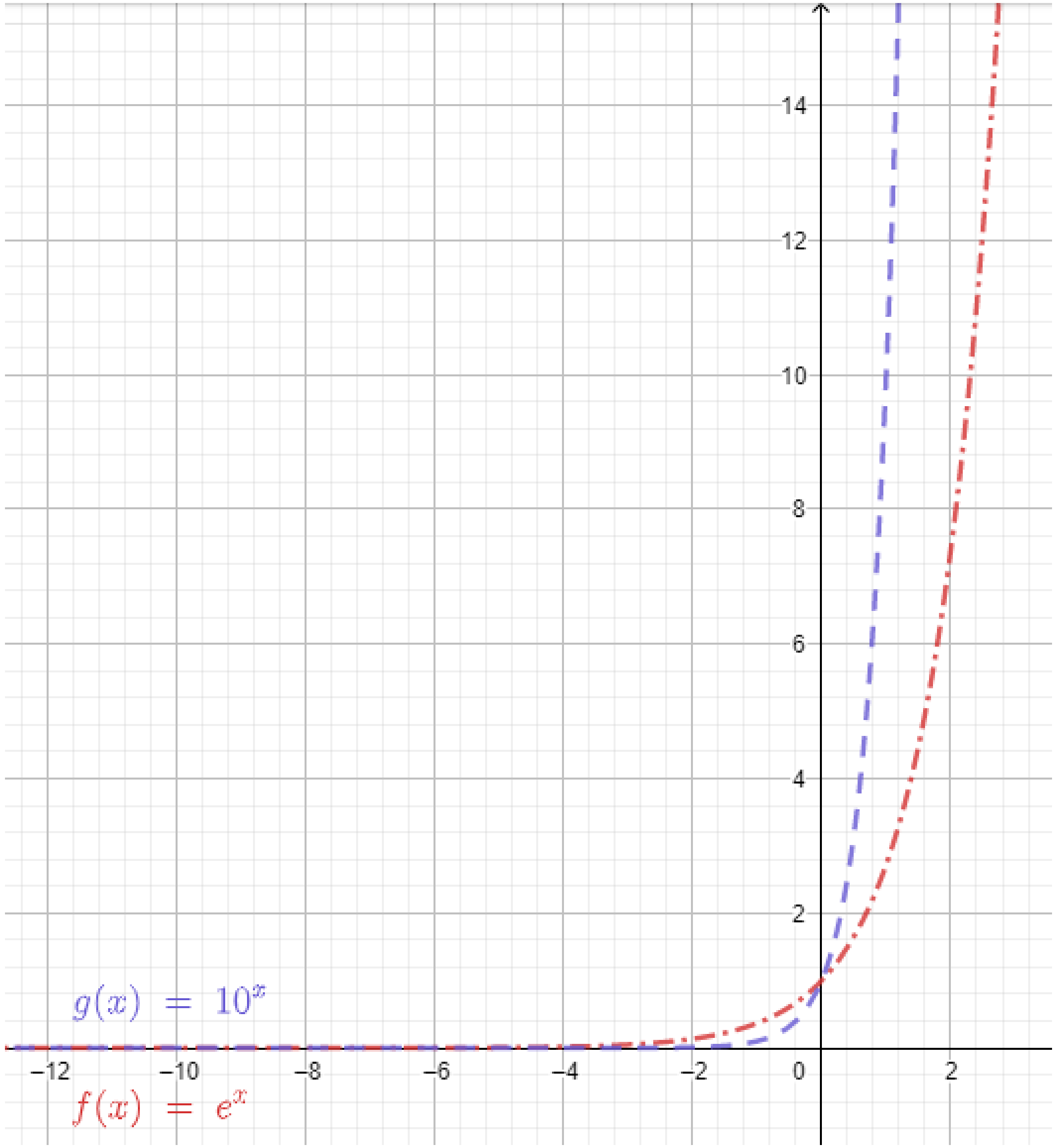
$$y = 10^x$$



$$y = e^x$$

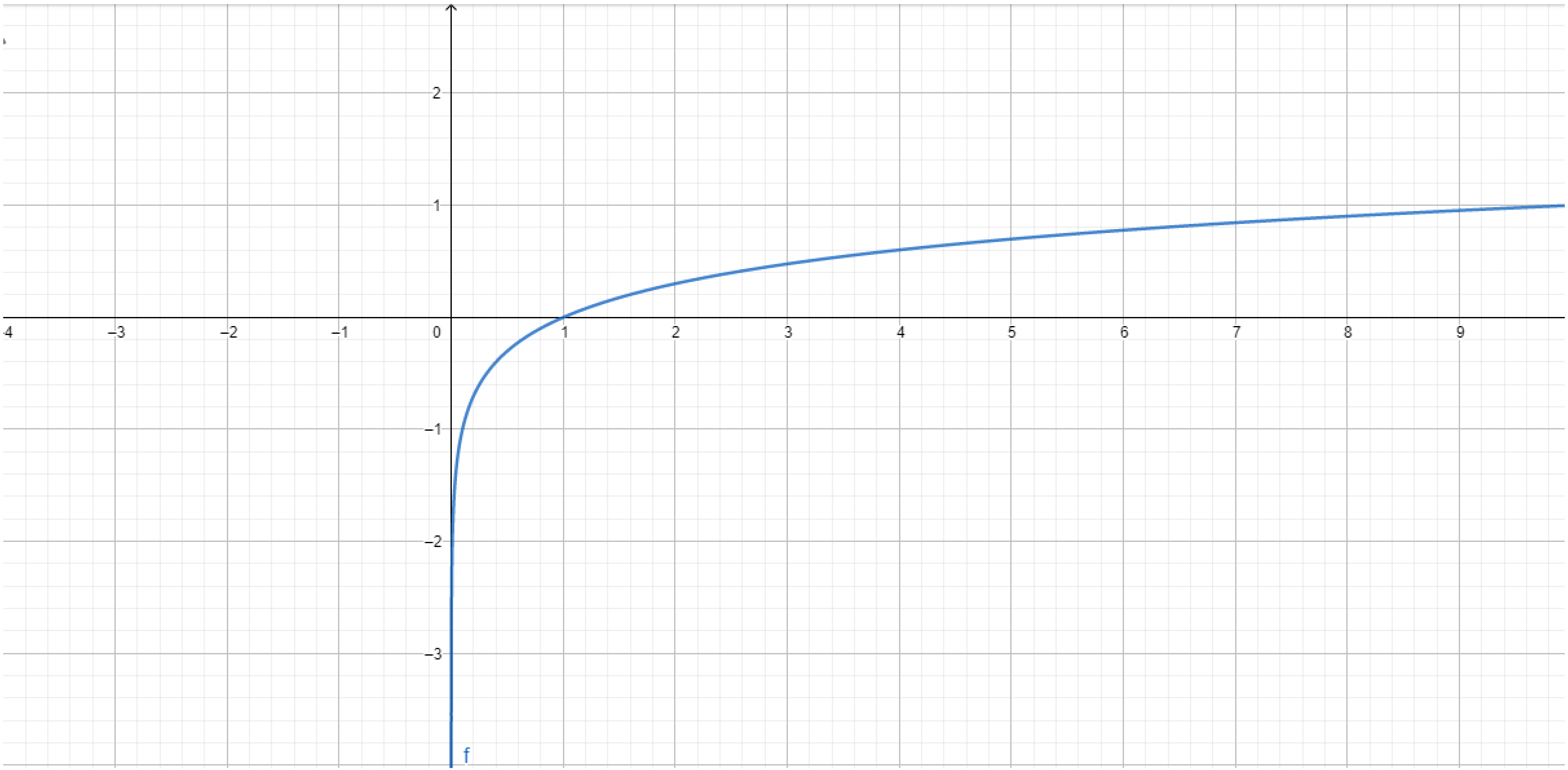


Confronto tra i grafici di esponenziali

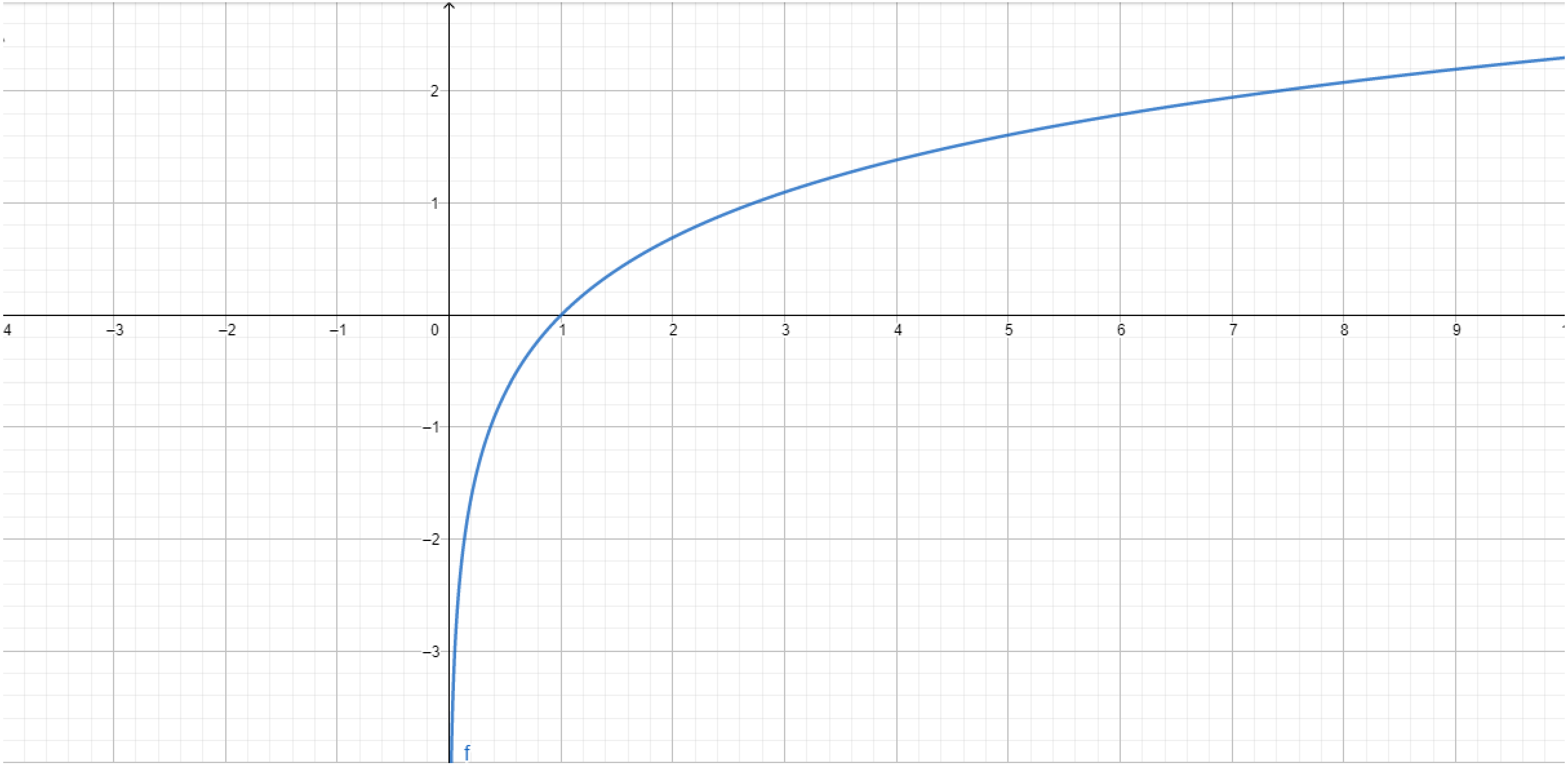


Funzioni logaritmo

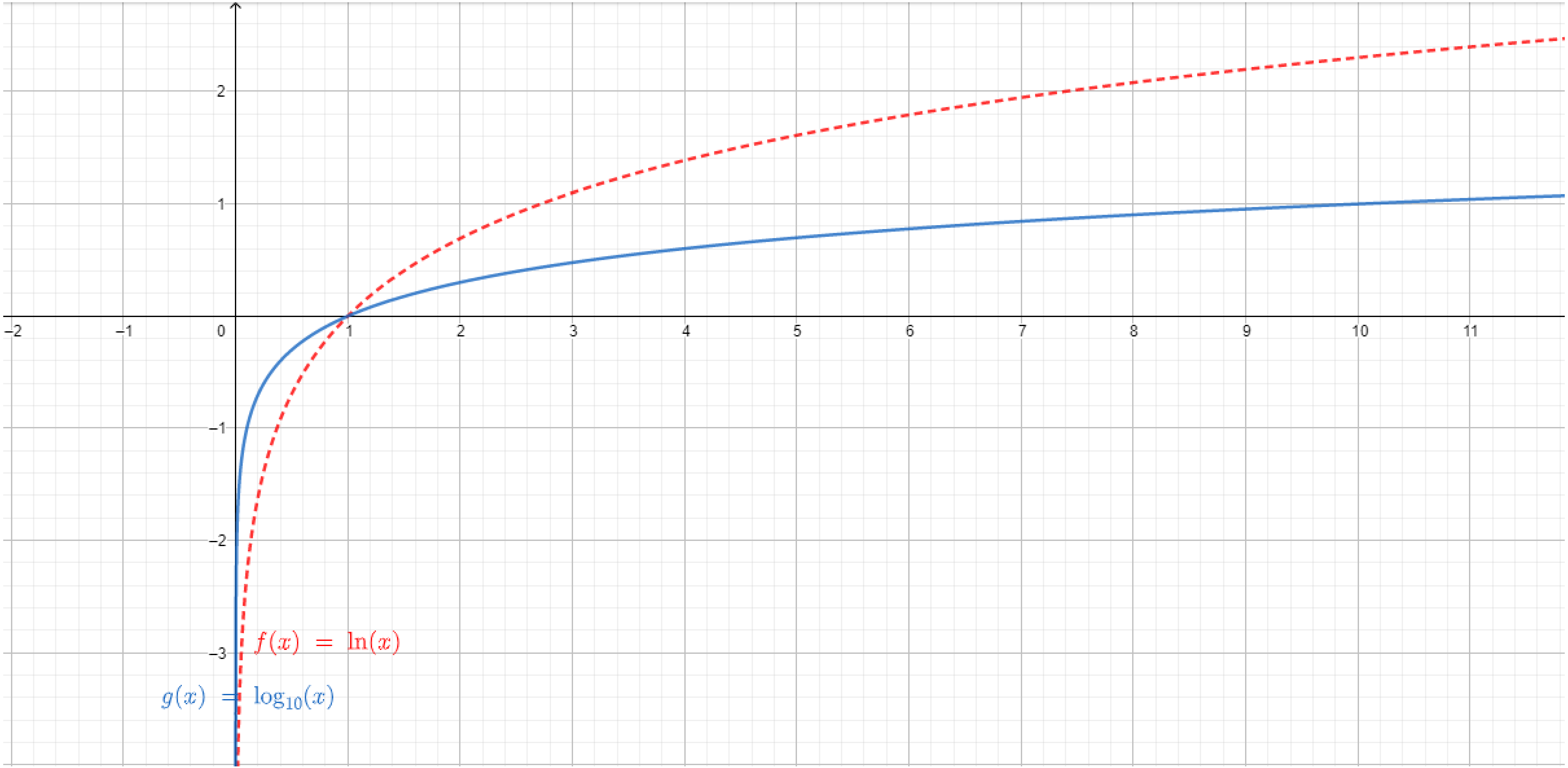
$$y = \log x$$



$$y = \ln x$$



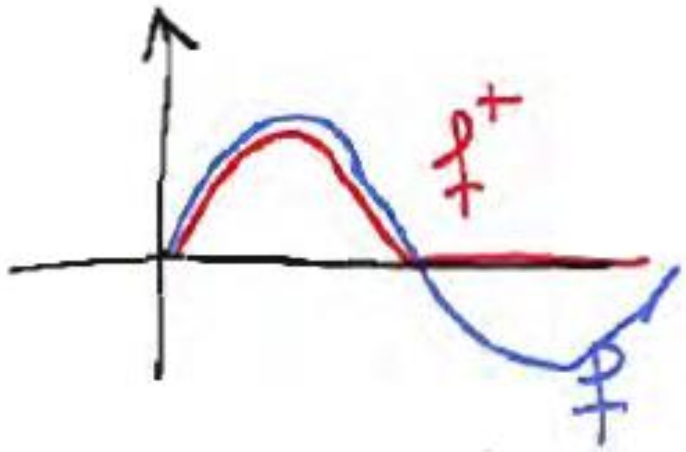
Confronto tra funzioni logaritmo



Parte positiva della funzione

Si definisce parte positiva di una funzione f e si indica con f^+ la funzione descritta dalla seguente:

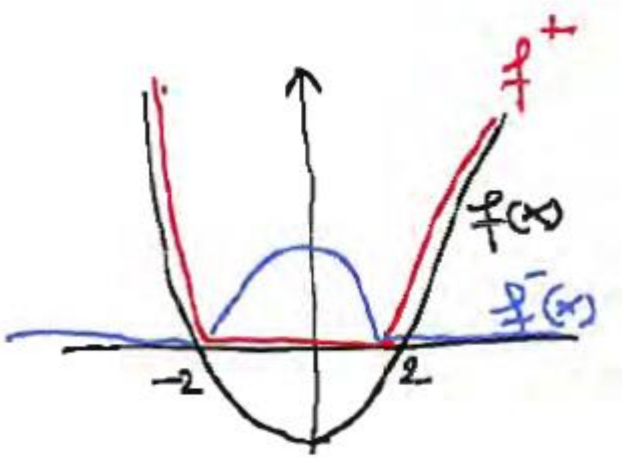
$$f^+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$$



Parte negativa della funzione

Si definisce parte negativa di una funzione f e si indica con f^- la funzione descritta dalla seguente:

$$f^-(x) = \frac{-f(x) + |f(x)|}{2}$$



Definizione di f^p e f^d

La funzione f^p è definita come:

$$f^p = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

La funzione f^d è definita come:

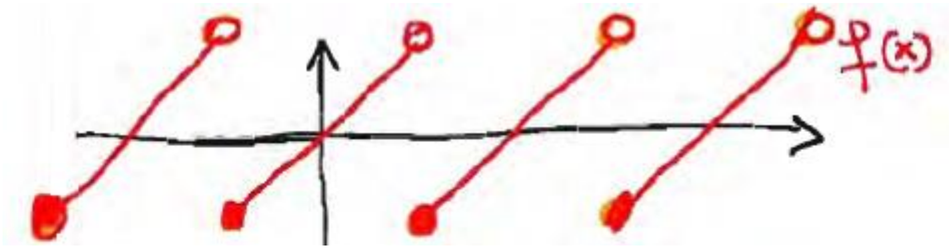
$$f^d = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Funzioni periodiche

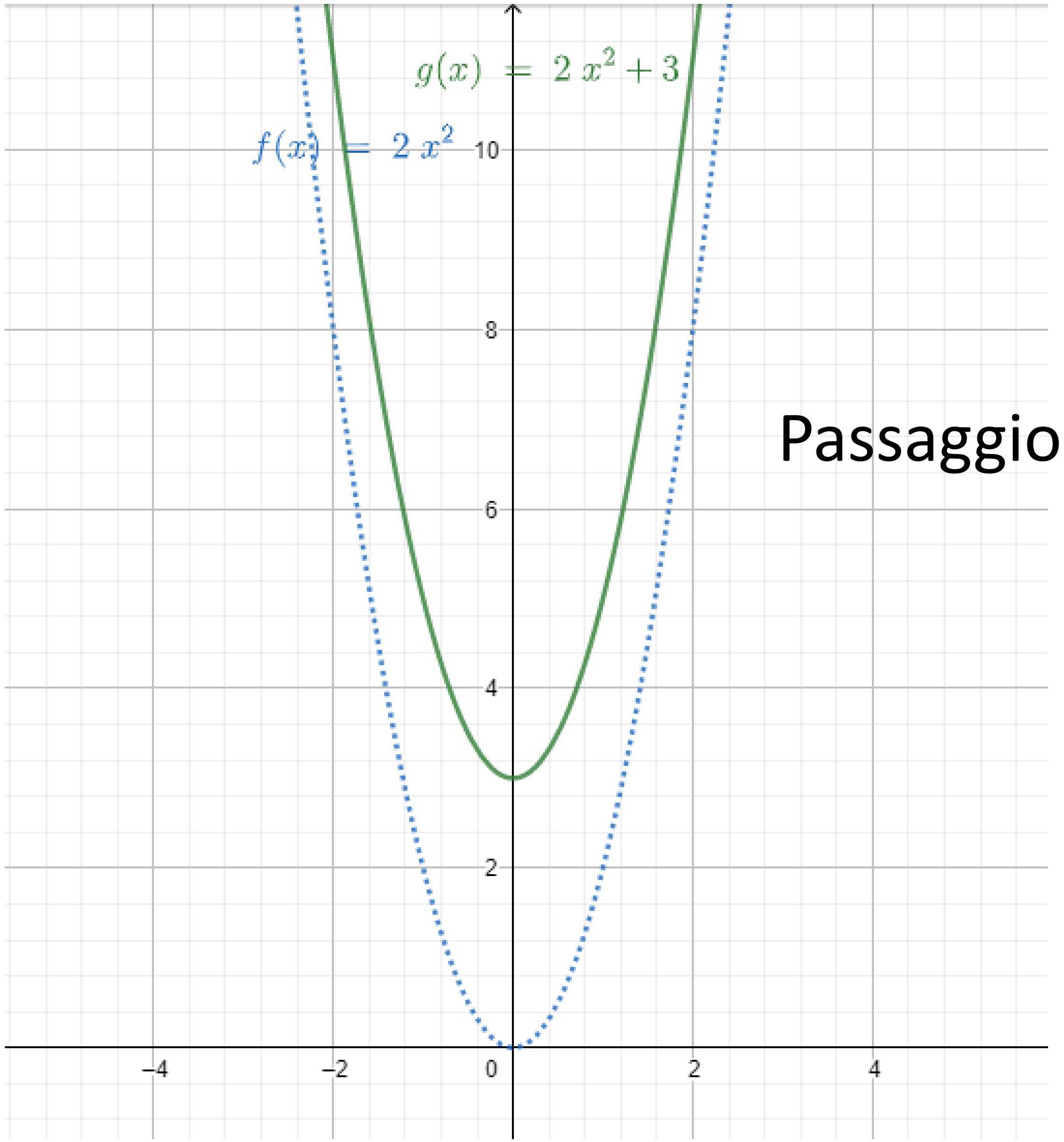
Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $\mathrm{T}(> 0)$ se:

$\forall x, x \in A\ sse\ (x + T) \in A$ Condizione sul dominio

$\forall x \in A\ \ f(x + T) = f(x)$ Condizione sulla funzione

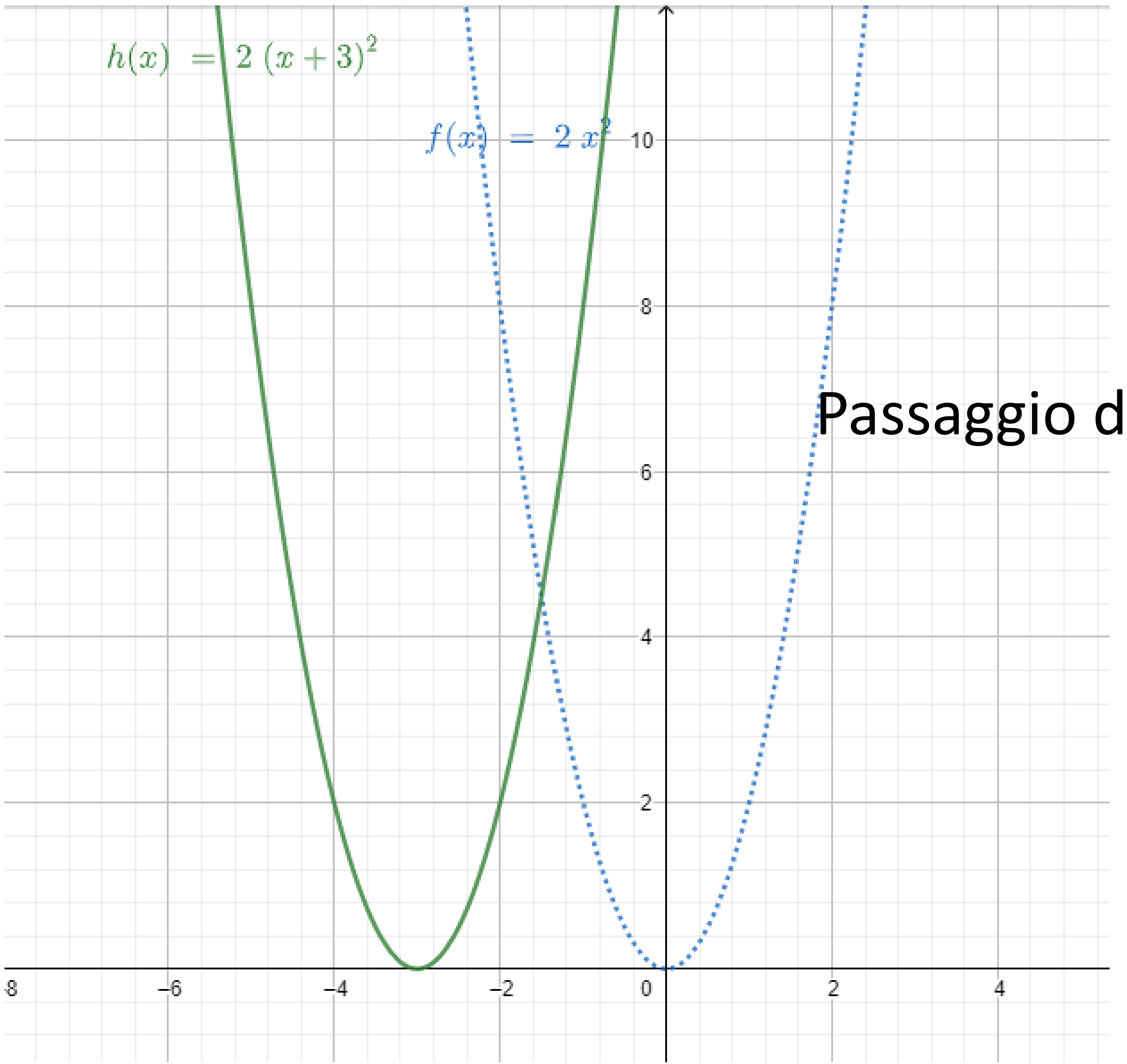


Traslazione verticale di f



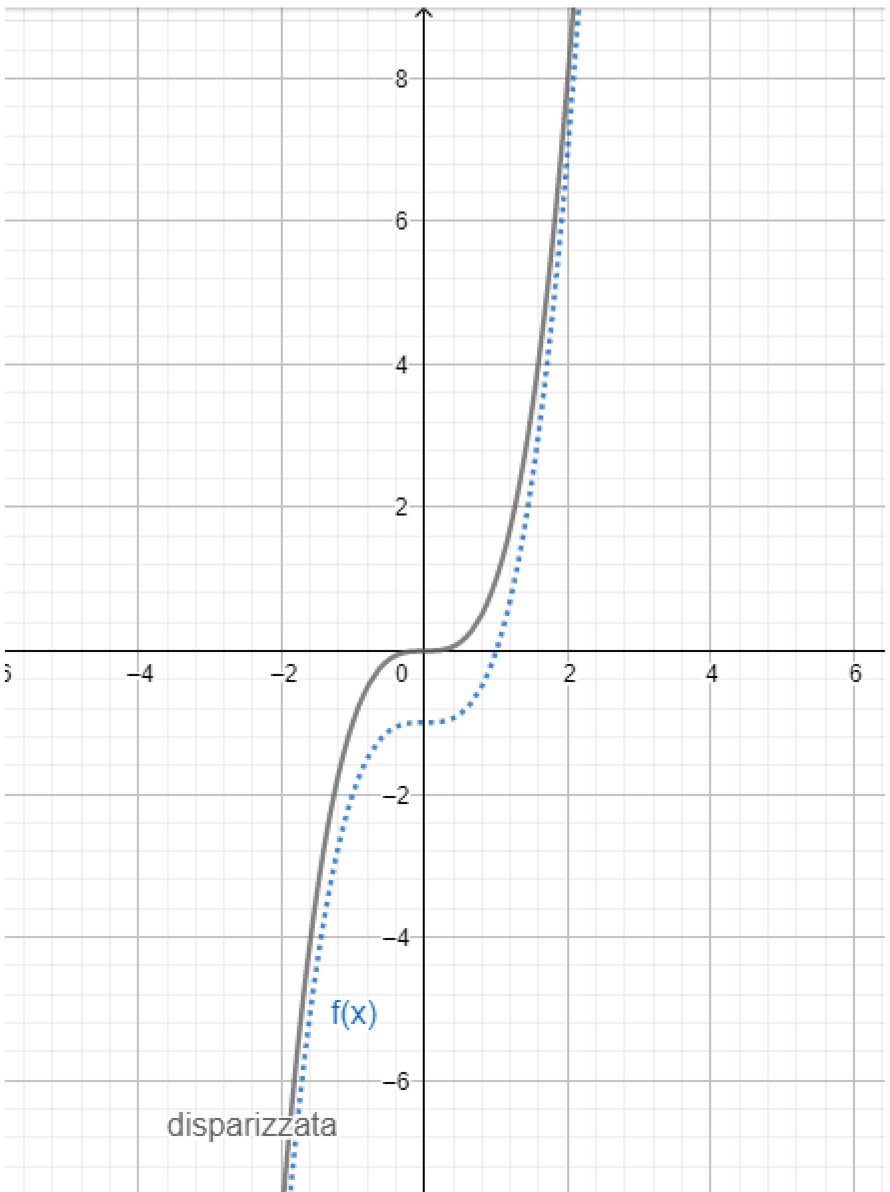
Passaggio da $f(x)$ a $f(x) + k$

Traslazione orizzontale di f

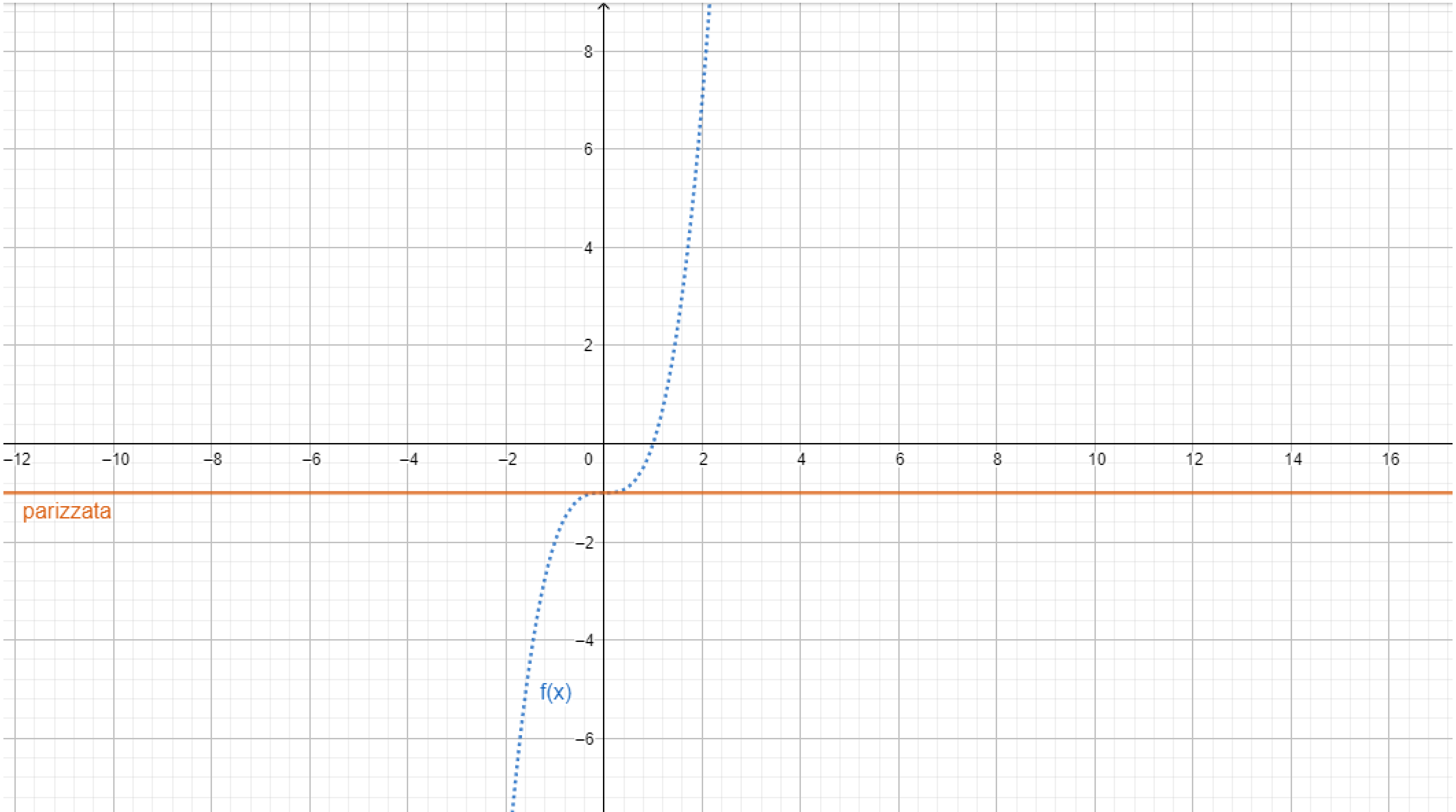


Passaggio da $f(x)$ a $f(x+k)$

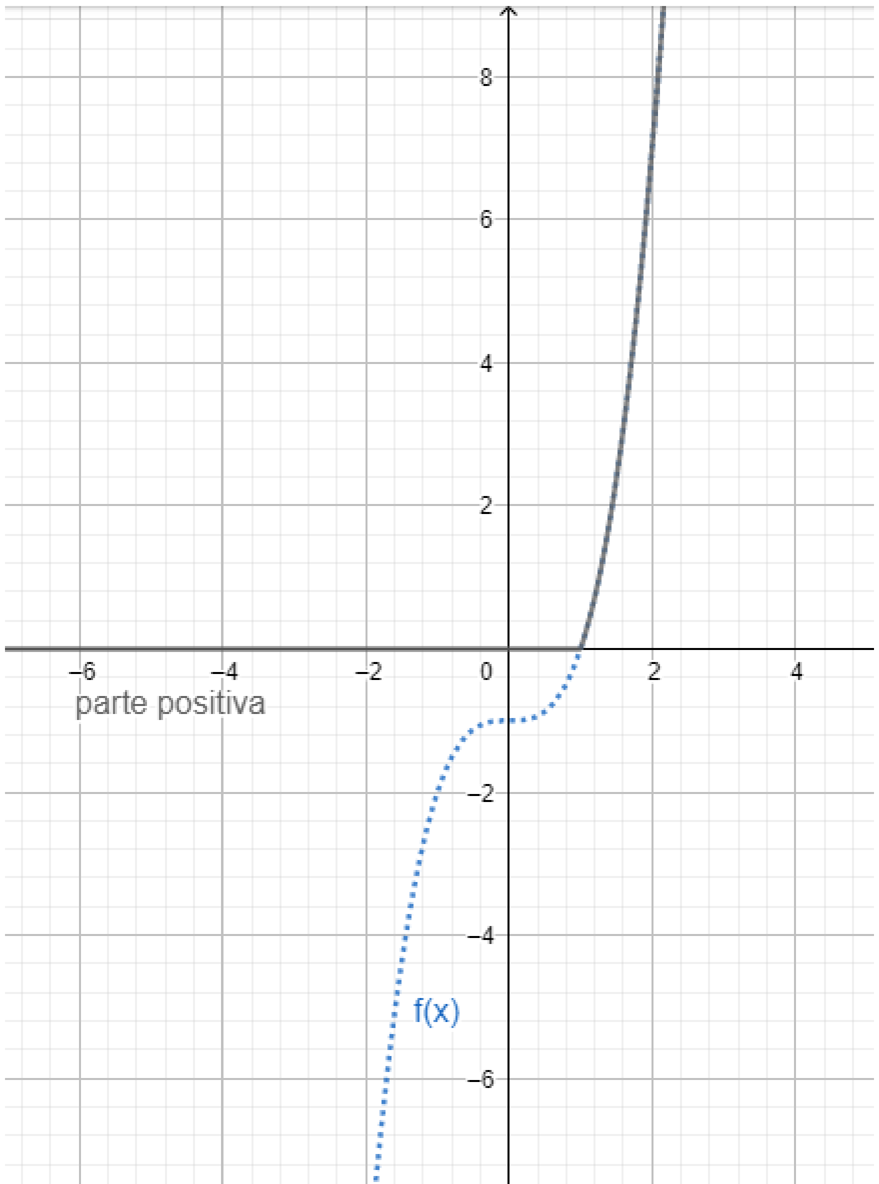
Costruzione della disparizzata



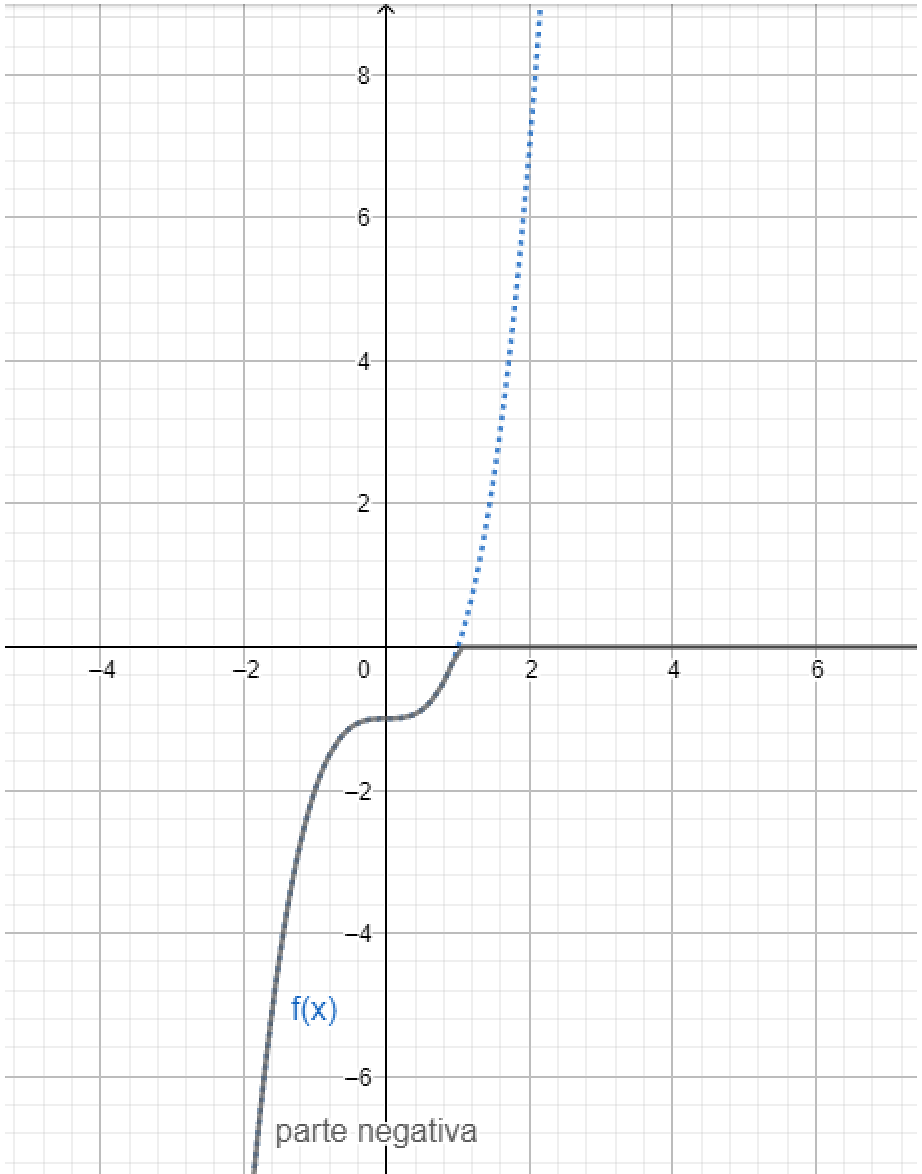
Costruzione della parizzata



Costruzione della parte positiva



Costruzione della parte negativa



Riassunto

- $f(x+k)$ → Traslazione di f a dx o a sx (quindi rispetto a y)
- $f(ax)$ → Amplificazione/contrazione di f rispetto alla y
- $f(-x)$ → Ribalto la f rispetto alla y

- $f(x)+k$ → Traslazione di f in alto o in basso (quindi rispetto a x)
- $af(x)$ → Amplificazione/contrazione di f rispetto alla x
- $-f(x)$ → Ribalto la f rispetto alla x