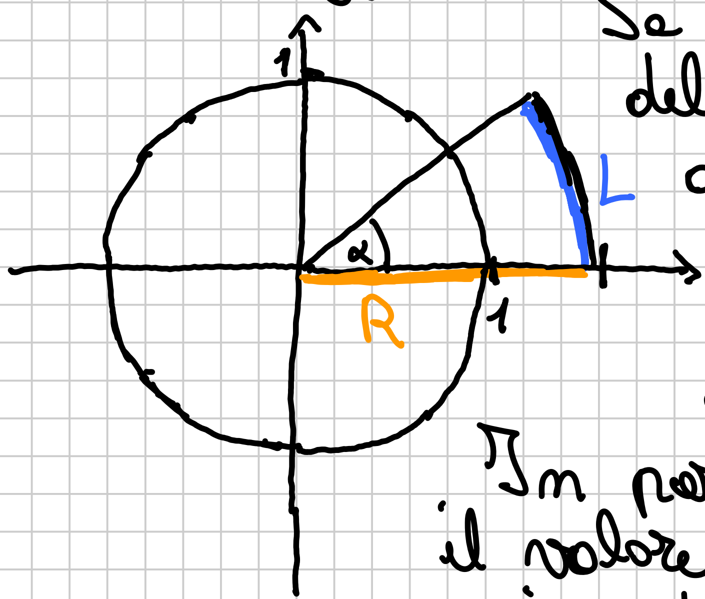
TRIGONOMETRIA ELEMENTARE

Note Title 22/11/2019

Def: Dato un angolo α e fissato un raggio R, si tracci la porzione di circonferenza di raggio R sottesa dall'angolo α.



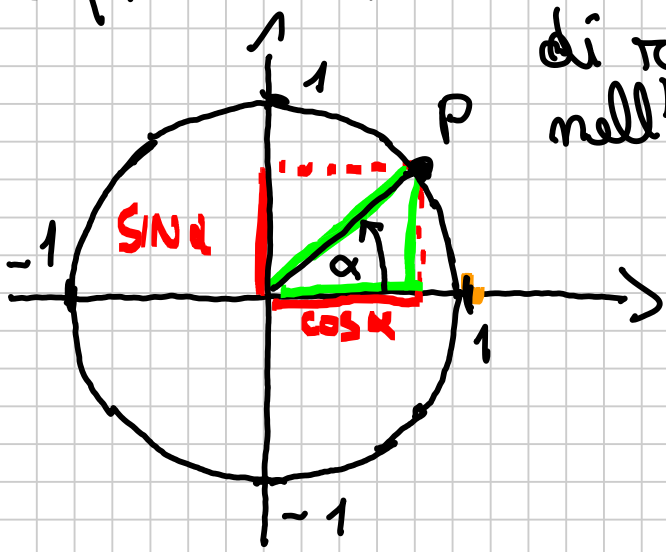
Se L è la misura dell'arco tracciato, allora

L / R

è la misura di α in radianti.

In particolare, se $R=1$, il valore di α in radianti corrisponde alla lunghezza di tale arco

Def: Preso un punto P sulla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine degli assi (circonferenza trigonometrica) corrispondente ad un angolo α, quel punto ha coordinate



$P = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

OSS: $-1 < \cos(\alpha) < 1$

$-1 < \sin(\alpha) < 1$

OSS: esaminando il triangolo rettangolo di cateti $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ e ipotenusa 1, si ha che $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$

TABELLA ANGOLI NOTEVOLI

GRADI	RADIANTI	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1
180°	π	-1	0
270°	$\frac{3}{2}\pi$	0	-1
360°	2π	1	0

Come convertiamo un angolo da gradi a radianti? Con una proporzione

$$\frac{\text{gradi}}{360°} = \frac{\text{radianti}}{2\pi}$$

ESEMPIO: 60° corrisponde in radianti a $\frac{\pi}{3}$, infatti

$$x = 2\pi \cdot \frac{60°}{360°} = 2\pi \frac{\cancel{60}^{1}}{\cancel{360}_{\cancel{6}\,3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

OSS: $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$

$\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 0$
$0 \leq \sin\alpha \leq 1$

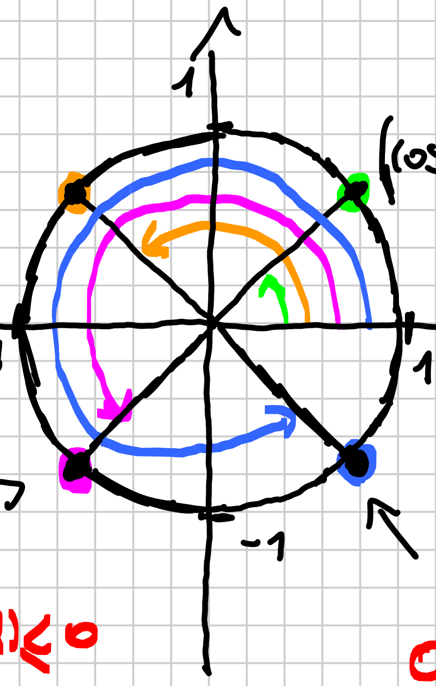
$\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2° QUAD

$0 \leq \cos(\alpha), \sin(\alpha) \leq 1$

$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1° QUAD.



$\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

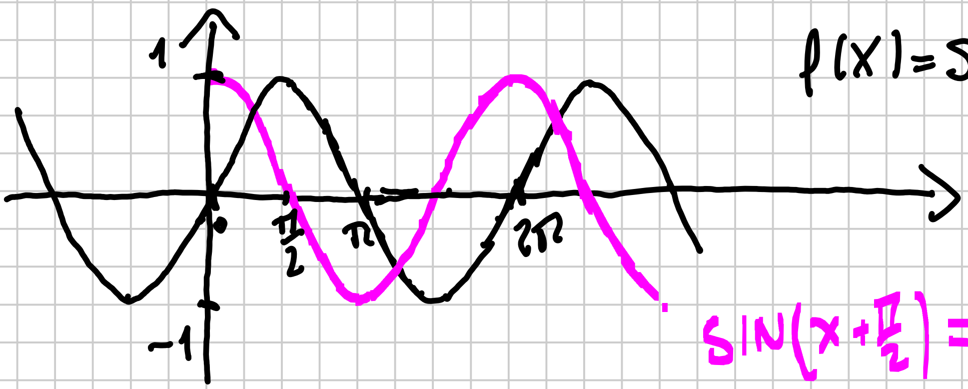
$-1 \leq \cos(\alpha), \sin(\alpha) \leq 0$

3° QUAD

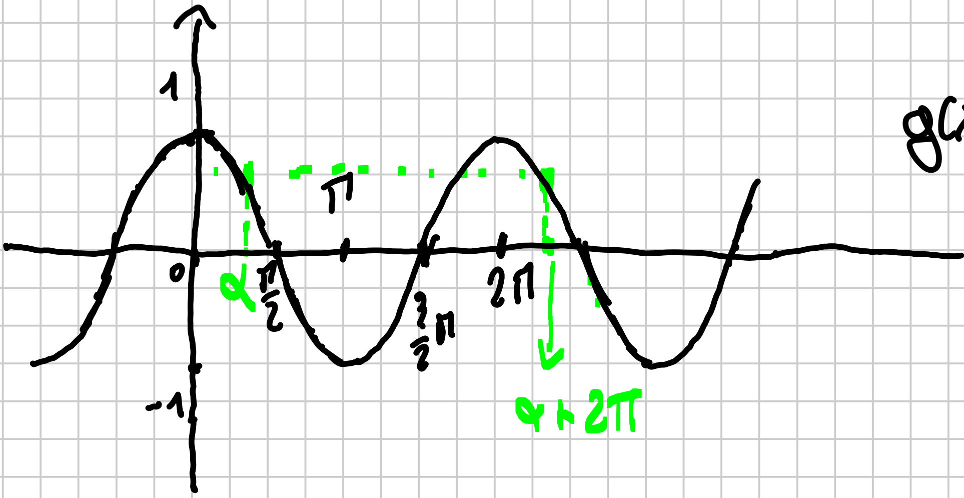
$0 \leq \cos\alpha \leq 1$
$-1 \leq \sin\alpha \leq 0$ 4° QUAD

GRAFICO DELLE FUNZIONI SIN(X), COS(X)

$f(x) = \sin(x)$



$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$



$g(x) = \cos(x)$

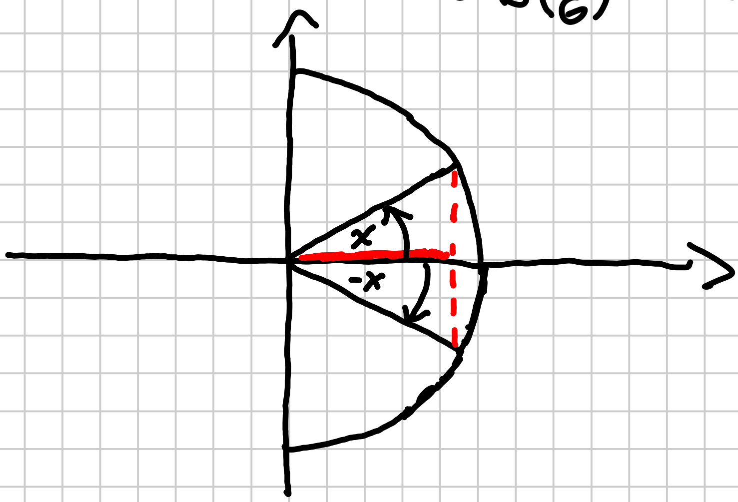
Si osserva che

- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$

PROPRIETÀ DI SIN(X) e COS(X)

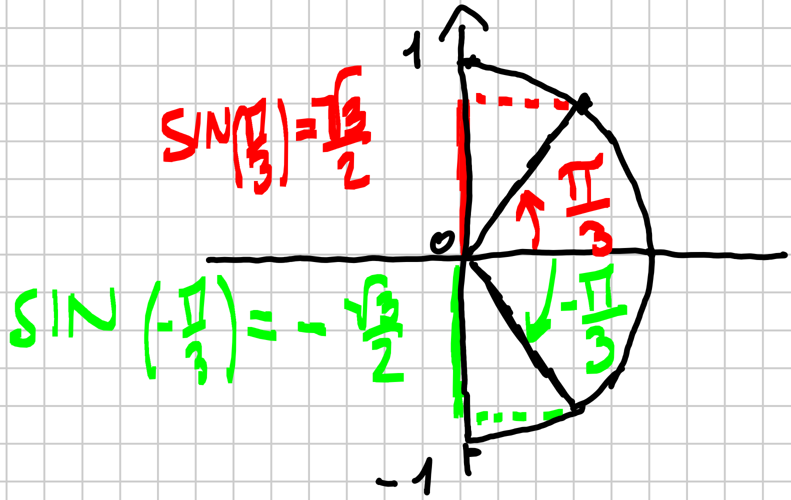
Parità di $\cos(x) \underset{\text{Def}}{\equiv} \cos(x) = \cos(-x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

ESEMPIO: $x = \frac{\pi}{6}$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

Disparità di $\sin(x) \underset{Def}{\equiv} \sin(-x) = -\sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$



$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Periodicità di $\sin(x)$ e $\cos(x) \underset{Def}{\equiv}$ le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono 2π-periodiche:

- $\cos(x) = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \ldots = \cos(x+k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x) = \sin(x+2\pi) = \ldots = \sin(x+k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$

Def: La funzione $tg(x)$ ("Tangente di x") è data da

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots, \frac{\pi}{2} + k\pi$$

OSS: $tg(x) = tg(x+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$

FORMULE DELLA SOMMA E DELLA DIFFERENZA

Si può dimostrare che

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

1) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
2) $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 1 - 2\sin(x)^2$
$= 2\cos(x)^2 - 1$

DIM:

1) $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)$
$= 2\sin(x)\cos(x)$
2) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$
$= \cos(x)^2 - \sin(x)^2$
$\hookrightarrow \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
$= 1 - \sin(x)^2 - \sin(x)^2$
$= 1 - 2\sin(x)^2$

FORMULE DI BISEZIONE

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}, & -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}} & \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \end{cases}$$

- $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} & 2k\pi \le \frac{x}{2} \le (2k+1)\pi \\ -\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} & (2k+1)\pi \le \frac{x}{2} \le (2k+2)\pi \end{cases}$

$k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}$

ESEMPIO: Calcoliamo $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

- $\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$
- $\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Consideriamo l'equazione $\sin(y) = k$:

é un'equazione che non ha una soluzione unica. Infatti se $\exists\ \bar{\sigma} \in [0, 2\pi[$ t.c. $\sin(\bar{\sigma}) = h$

a) necessariamente $-1 \leq h \leq 1$

b) dalla formula di sottrazione

$$\sin(\pi - \bar{\sigma}) = \sin(\bar{\sigma}) = h$$

c) $\sin(\bar{\sigma} + 2k\pi) = \sin(\bar{\sigma}) = h \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

↳ periodicità di $\sin(x)$

dalla b) e dalla c) posso affermare che

$$\sin(\pi - \bar{\sigma} + 2k\pi) = h \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

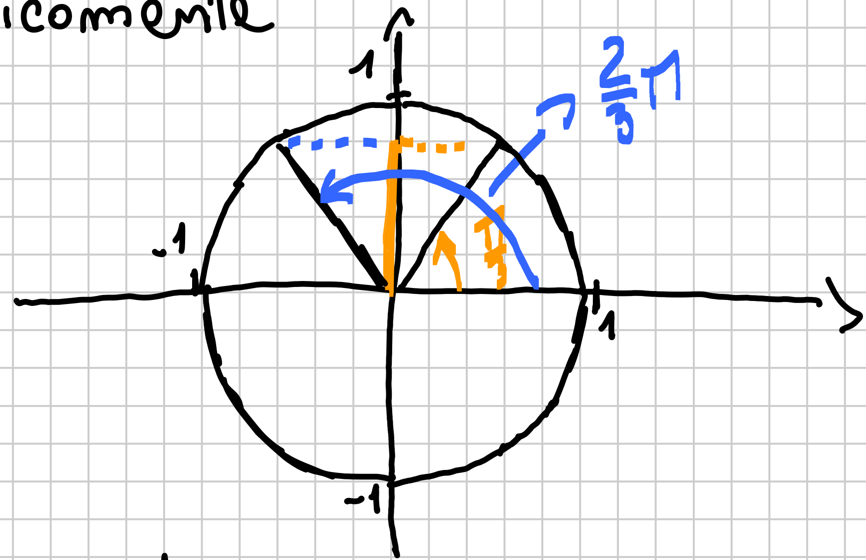
cioè $\pi - \bar{\sigma} + 2k\pi$ è un'altra soluzione dell'equazione $\forall k \in \mathbb{Z}$. Possiamo concludere che se $\bar{\sigma}$ è soluzione di $\sin(\varphi) = h$ (cioè $\sin(\bar{\sigma}) = h$) allora $\bar{\sigma} + 2k\pi$ e $(\pi - \bar{\sigma}) + 2k\pi$ sono le infinite soluzioni dell'equazione $(k \in \mathbb{Z})$.

ESERCIZIO: determinare i valori di x per cui si ha

a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$

Risolviamo l'eq. 1:
graficamente



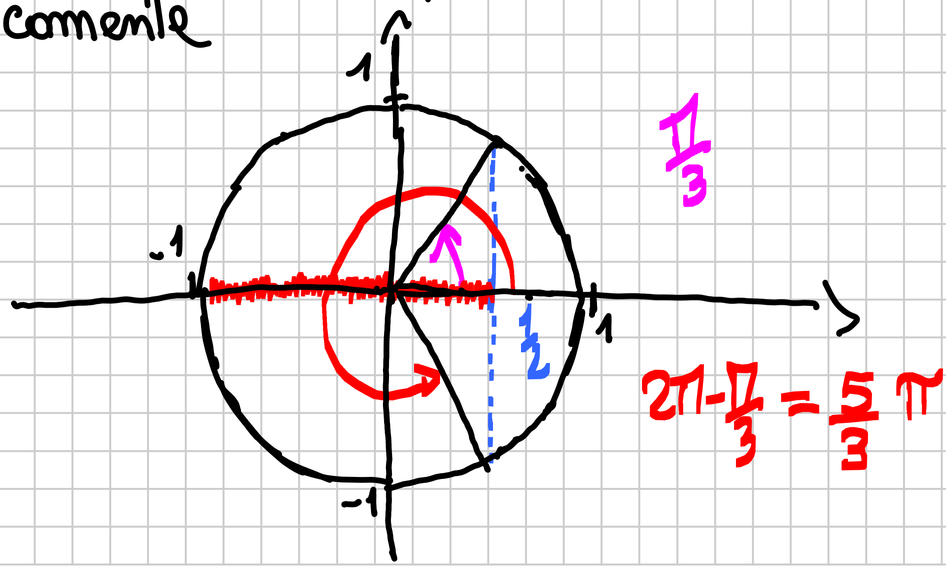
sappiamo che $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2}{3}\pi$ sono le uniche soluzioni in $[0, 2\pi[$

L'insieme di tutte le soluzioni di $\sin(x) = \sqrt{3}/2$ è dato da

$$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Risolviamo la disequazione 2:
graficamente



La soluzione della disequazione in $[0, 2\pi[$ è data dall'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right]$
Se voglio tutte le soluzioni, data la periodicità di $\cos(x)$, allora devo considerare l'insieme

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right]$$