CORSO DI RECUPERO PER STUDENTI CON OFA

Università di Parma, Dipartimento di Ingegneria e Architettura

A.A. 2019-2020

Soluzioni ai quesiti di PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

1. Risposta esatta: (b).
   SOLUZIONE DEL QUESITO:

   Per determinare il dominio della funzione f, occorre imporre che i radicandi delle due radici siano non negativi, ossia risolvere il sistema di disequazioni[1]

   $$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \iff x \geq 1.$$

   Quindi $A = [1, +\infty)$.

   Per determinare il dominio della funzione g, oltre ad imporre la non negatività dei radicandi delle due radici, occorre escludere che il denominatore si annulli. Risolviamo quindi il sistema

   $$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \iff x > 1.$$

   Quindi $B = (1, +\infty) \subset A$. Essendo B un sottoinsieme di A, allora $A \cap B = B$, che corrisponde alla riposta (b).

2. Risposta esatta: (c).
   SOLUZIONE DEL QUESITO:

[1] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base.* Pitagora (2003), pag. 34.

Innanzitutto riscriviamo la funzione $f(x)$ in una forma che ci permetta di facilitare i conti:

$$f(x) = \frac{x-2}{2x+3} = \frac{2}{2} \cdot \frac{x-2}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+3-3-4}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+3-7}{2x+3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{2x+3}\right).$$

Consideriamo poi x_1, $x_2 \in (-\infty, -3/2)$ tali che $x_1 < x_2$. Dalle proprietà di ordinamento dei numeri reali[2], si può verificare che

$$x_1 < x_2 \iff 2x_1 < 2x_2 \iff 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3.$$

Inoltre

$$x_2 < -\frac{3}{2} \iff 2x_2 < -3 \iff 2x_2 + 3 < 0$$

e questo ci porta a dimostrare che $2x_1 + 3$ e $2x_2 + 3$ sono negativi perchè

$$2x_1 + 3 < 2x_2 + 3 < 0.$$

Consideriamo ora solo la disequazione $2x_1+3 < 2x_2+3$: dividendo entrambi i membri per $(2x_2 + 3)(2x_1 + 3)$ (che, essendo prodotto di quantità negative, è una quantità positiva), otteniamo la disequazione

$$\frac{2x_1+3}{(2x_1+3)(2x_2+3)} < \frac{2x_2+3}{(2x_1+3)(2x_2+3)} \iff \frac{1}{2x_1+3} > \frac{1}{2x_2+3}.$$

A questo punto, sfruttando ancora le proprietà di ordinamento dei numeri reali[2], possiamo dimostrare la seguente catena di implicazioni:

$$\frac{1}{2x_1+3} > \frac{1}{2x_2+3} \iff -\frac{7}{2x_1+3} < -\frac{7}{2x_2+3} \iff 1 - \frac{7}{2x_1+3} < 1 - \frac{7}{2x_2+3}$$
$$\iff \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{2x_1+3}\right) < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{2x_2+3}\right).$$

Abbiamo quindi dimostrato che, fissati x_1 e x_2 nell'intervallo $(-\infty, -3/2)$, con $x_1 < x_2$, si ha che $f(x_1) < f(x_2)$, verificando quindi la definizione di funzione strettamente crescente. La risposta corretta è pertanto la (c). Con ragionamenti analoghi si può verificare che nell'intervallo considerato non esistono due valori $x_1 \neq x_2$ per i quali $f(x_1) = f(x_2)$, escludendo in questo modo l'alternativa (a).

[2] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base.* Pitagora (2003), pag. 33.

3. Risposta esatta: (c).
   <u>SOLUZIONE DEL QUESITO:</u>
   Se f fosse periodica di periodo $T > 0$, allora dovrebbe valere che

   $$f(x+T) = (x+T)\sin(x+T) = x\sin(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

   il che non può verificarsi, in quanto la funzione seno è periodica di periodo 2π, ma $x+T \neq x$, $\forall T > 0$. Pertanto la risposta esatta è la (c).
   D'altra parte, possiamo escludere ad una ad una le altre alternative:

   (a) la funzione non è periodica di periodo 2π in quanto

   $$f(x+2\pi) = (x+2\pi)\sin(x+2\pi) = (x+2\pi)\sin(x) \neq x\sin(x) = f(x);$$

   (b) la funzione non è periodica di periodo π in quanto

   $$f(x+\pi) = (x+\pi)\sin(x+\pi) = -(x+\pi)\sin(x) \neq x\sin(x) = f(x);$$

   (d) la funzione non è dispari in quanto

   $$f(-x) = -x\sin(-x) = x\sin(x) \neq -x\sin(x) = -f(x),$$

   ma è pari, essendo $f(-x) = f(x)$.

4. Risposta esatta: (a).
5. Risposta esatta: (b).
6. Risposta esatta: (d).
7. Risposta esatta: (c).
8. Risposta esatta: (a).
9. Risposta esatta: (d).
10. Risposta esatta: (d).