7° INCONTRO

DISEQUAZIONI

Disequazioni di I grado

x – a > 0 $(\geq, <, \leq)$ $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$

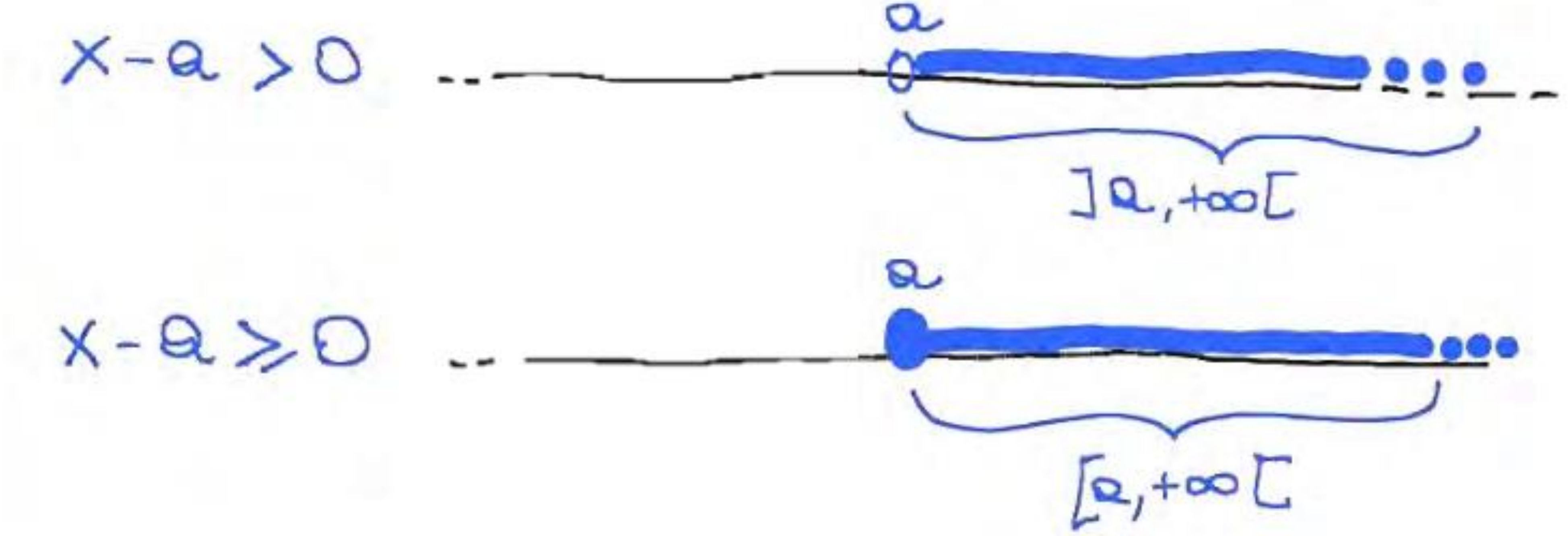
$\{x \ \in \mathbb{R} : x - a > 0\} \equiv \{x \ \in \mathbb{R} : x > a\}$ = $]a, +\infty[$

$\{x \ \in \mathbb{R} : x - a \geq 0\} \equiv \{x \ \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ = $[a, +\infty$ [

$\{x \ \in \mathbb{R} : x - a \leq 0\} \equiv \{x \ \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ =]-∞, a]

$\{x \ \in \mathbb{R} : x - a < 0\} \equiv \{x \ \in \mathbb{R} : x < a\}$ =]-∞, a[

Graficamente possiamo rappresentare l’insieme delle soluzioni sulla retta



Disequazioni di II grado

$$\mathbf{ax^2 + bx + c > 0} \quad (\geq, <, \leq) \qquad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$$

N.B. Si può procedere mediante lo studio della parabola.

Si può sempre supporre che $a > 0$:

qualora $a > 0$, si moltiplica per (-1) ambo i membri di $ax^2 + bx + c > 0$ e si studia

$$-ax^2 - bx - c < 0$$

N.B.: se a=0 la disequazione è di 1° grado.

Essendo $a > 0$, la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ ha le stesse soluzioni di

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0$$

e quindi ci siamo ridotti a studiare:

$$x^2 + bx + c > 0 \quad (1)$$

$$x^2 + bx + c < 0 \quad (2)$$

Sistemi di disequazioni

Si ha che $\left\{x: \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}\right\} \equiv \{x: f(x) > 0 \ e \ g(x) > 0\}$

$$\equiv \{x: f(x) > 0\} \cap \{g(x) > 0\}$$

Esempio:

Per quali x: $\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \\ x-3>0 \end{cases}$?

Va calcolata la seguente intersezione:

$\{x: x-1>0\} \cap \{x: x-2>0\} \cap \{x: x-3>0\}$

Ovvero

$]1,+\infty[\ \cap\ ]2,+\infty[\ \cap\ ]3,+\infty[\ \equiv\ ]3,+\infty[$

Osservazione:

Confrontare le soluzioni della disequazione

(x-1)(x-2)(-3) > 0

con le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \\ x-3>0 \end{cases}$$

Osservazione importante:

$$1)\ \ \{x: f(x) > g(x)\} \equiv \{x: f(x) - g(x) > 0\}$$

$$2)\ \ \{x: f(x) > g(x)\} \equiv$$

$$= \left\{x: \frac{f(x)}{g(x)} > 1 \ e\ g(x) > 0\right\} \cap \left\{x: \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \ e\ g(x) < 0\right\}$$

$$= \left(\left\{x: \frac{f(x)}{g(x)} > 1\ \right\} \ \cap\ \{x: g(x) > 0\ \}\right) \cup \left(\left\{x: \frac{f(x)}{g(x)} < 1\ \right\} \ \cap\ \{x: g(x) < 0\ \}\right) \cup (\{x: f(x) > 0\} \ \cap\ \{x: g(x) = 0\ \})$$

Disequazioni fratte

$$\left\{x \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\right\} \equiv$$

$$\{x \colon f(x) \geq 0 \; e \; g(x) > 0\} \cup \{x \colon f(x) \leq 0 \; e \; g(x) < 0\}$$

$$\equiv (\{x \colon f(x) \geq 0\} \cap \{x \colon g(x) > 0\}) \quad \cup$$

$$(\{x \colon f(x) \leq 0\} \cap \{x \colon g(x) < 0\})$$

Esempio:

Per quali x si ha $\frac{x-3}{2-3x} \geq 1$?

$$\frac{x-3}{2-3x} \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{x-3-2+3x}{2-3x} \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{4x-5}{2-3x} \geq 0$$

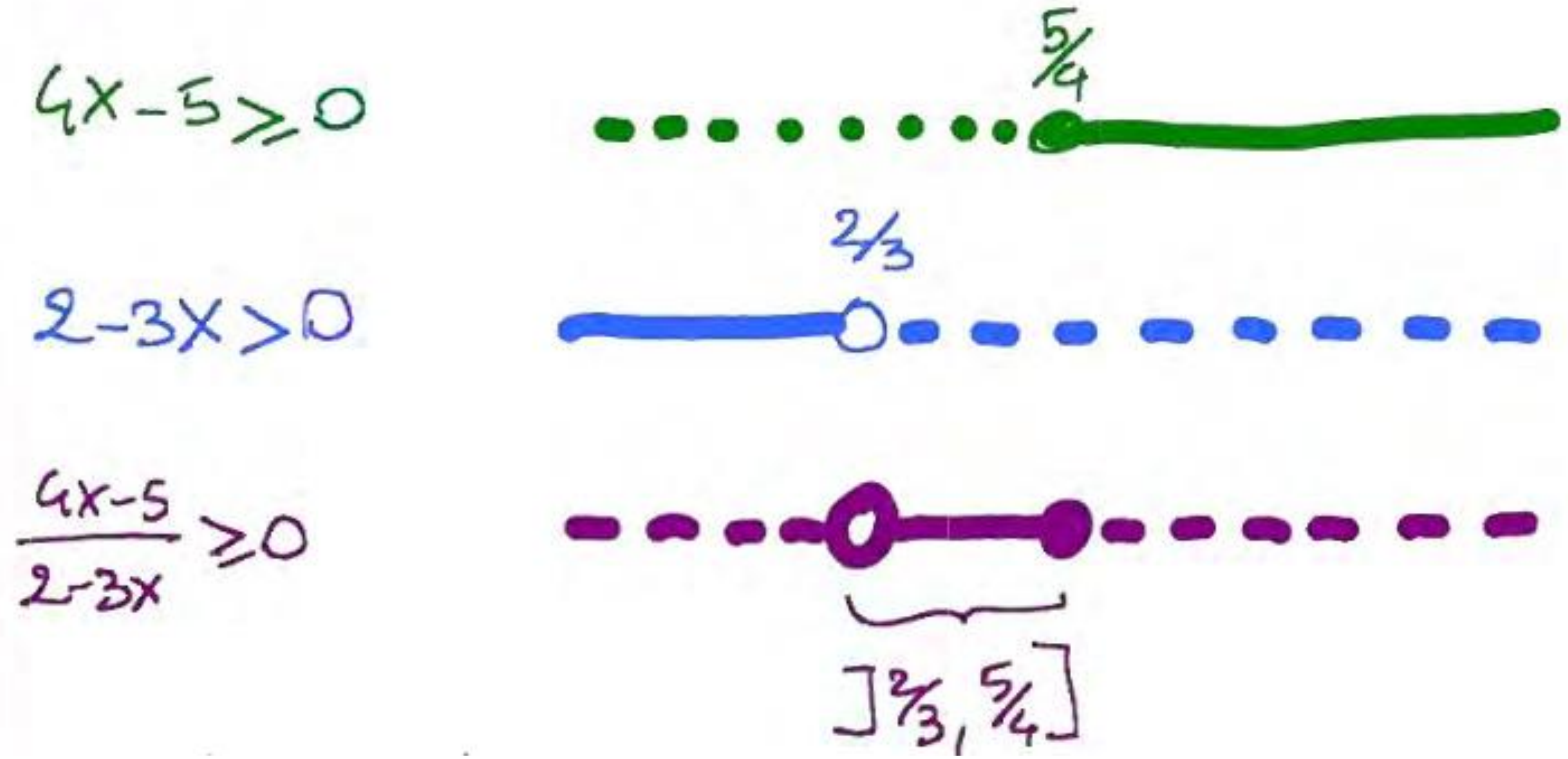
$$(\{x: 4x-5 \geq 0\} \cap \{x: 2-3x > 0\}) \cup (\{x: 4x-5 \leq 0\} \cap \{x: 2-3x < 0\})$$

$$\left(\left[\tfrac{5}{4}, +\infty \right[\cap \left] -\infty, \tfrac{2}{3} \right[\right) \cup \left(\left] -\infty, \tfrac{5}{4} \right] \cap \left] \tfrac{2}{3}, +\infty, \right[\right)$$

$$\emptyset \qquad \cup \qquad \left] \tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{4} \right]$$

Nota:

Si poteva arrivare al risultato essendo:



ovvero trattando la frazione come un prodotto + ($2-3x\neq 0$)

Problema:

1) $\left\{x\colon \frac{x-1}{2-x} > 0\right\} \equiv \{x\colon (x-1)(2-x) > 0\}$

è vera?

2) $\left\{x\colon \frac{x-1}{2-x} \geq 0\right\} \neq> \{x\colon (x-1)(2-x) > 0\}$

è vera?

3) $\left\{x\colon \frac{x-1}{2-x} \geq 0\right\} \neq< \{x\colon (x-1)(2-x) \geq 0\}$

è vera?

Disequazioni di grado > al secondo

Esempio: per quali x $x^4-16>0$?

In questo caso si procede fattorizzando:

$P(x) = x^4-16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

Osserviamo poi che:

$x^2+4 \geq 4 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Dunque:

$$\{x:\ \ P(x) > 0\} \equiv \{x: (x-2)(x+2) > 0\} \cap \{x: x^2 + 4 > 0\}$$

$$\equiv \{x: (x-2)(x+2) > 0\} \cap \mathbb{R}$$

$$\equiv \ ]-\infty, -2[\quad \cup \quad]2, +\infty[$$

(vedi la disequazione di secondo grado)

Dunque il problema sta nella fattorizzazione.

A tal fine è fondamentale il teorema di Ruffini:

’’ $P(x)$ polinomio grado n: $P(a)=0$ $a \in \mathbb{R}$
$\rightarrow \exists$ $Q(x)$ polinomio grado $n-1$: $P(x)=Q(x)(x-a)$ ’’

Ovvero ‘’$P(a)=0 \rightarrow (x-a)$ divide $P(x)$’’

Può essere utile il seguente Teorema:

Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$
con $a_i \in \mathbb{N}$

se $s \in \mathbb{N}$ è t.c. $P(s)=0$ allora s divide a_0