no verticali, ma formavano con la verticale un angolo α di circa $7°12'$ (nella figura seguente questa ampiezza è stata esagerata per maggiore evidenza).

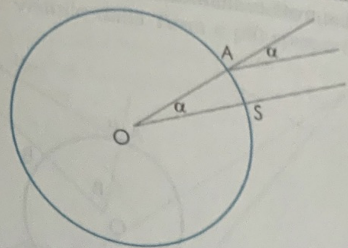


Fig. 14

Eratostene conosceva, sia pure con valutazione grossolana (forse mediante il computo delle giornate di cammino) la distanza fra Siene e Alessandria. Non siamo in grado di valutare la bontà della sua misura poiché non ci è noto con precisione l'equivalente dello *stadio*, l'unità di misura da lui impiegata.
Accettiamo comunque il valore di 785 km per la distanza fra queste città.
A questo punto dobbiamo enunciare tre ipotesi implicite nel ragionamento di Eratostene:

a In ogni punto della superficie della Terra la verticale (ottenuta mediante il filo a piombo) è diretta verso il centro della Terra;

b la distanza fra la Terra e il Sole è molto grande, rispetto alle dimensioni della Terra; perciò i raggi del Sole che colpiscono i diversi punti della Terra si possono ritenere fra loro paralleli;

c Alessandria si trova esattamente a Nord di Siene, cosicché il mezzogiorno è simultaneo per le due località.

Pensiamo di tagliare la Terra con un piano che passi per il suo centro O, che contiene i punti S (Siene), A (Alessandria) e anche, ovviamente, il Sole (vedi figura precedente).
Allora risulta chiaro che l'angolo del raggio del Sole con la verticale nel punto A ha la stessa ampiezza dell'angolo $S\widehat{O}A$. (Riflettere sulla traslazione che manda il punto A nel punto O.)
Domandiamoci ora: la lunghezza dell'arco fra A e S (cioè la lunghezza del cammino fra Alessandria e Siene), quale frazione rappresenta della lunghezza dell'intera circonferenza?

$$\frac{785}{x} = \frac{7+\frac{1}{5}}{360} = \frac{\frac{36}{5}}{360} = \frac{1}{50}$$

da cui

$$x = 785 \cdot 50 = 39\,250$$

Si trova così che l'intera circonferenza è lunga 39 250 km, valore notevolmente approssimato al valore oggi noto (circa 40 000 km).

... Luna dalla Terra ... il punto di partenza per determinare le ... lo schema di

Eratostene, supponendo che ora si osservi un punto L della Luna da due punti A e B della Terra, abbastanza distanti fra loro. Per semplicità supponiamo che il punto L si trovi esattamente sulla verticale di B.

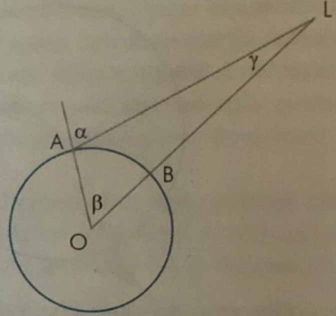


Fig. 15

Indicando le ampiezze degli angoli come in figura, si ha $\alpha = \beta + \gamma$, essendo α l'angolo esterno.
Possiamo ritenere noto β, per il fatto che A e B sono punti noti sulla Terra.

NOTA L'angolo β può essere determinato utilizzando il Sole, con il metodo di Eratostene, oppure, più comodamente, utilizzando una "stella fissa". (Le stelle fisse hanno una distanza enorme dalla Terra e raggi che vengono da esse si possono considerare paralleli.)

Dunque l'angolo $\gamma = \alpha - \beta$ è noto. Allora tenendo conto che $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$, dal teorema dei seni, detta r la misura del raggio terrestre, ricaviamo

$$\frac{r}{\sin\gamma} = \frac{\overline{OL}}{\sin\alpha}$$

da cui
$$\overline{OL} = r\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Conoscendo il valore di r e quelli di α e di β, si trova facilmente il valore di $\overline{OL}$.
Al giorno d'oggi si dispone di tecniche raffinate e precise per misurare la distanza Terra-Luna. L'orbita della Luna attorno alla Terra è solo approssimativamente circolare; in realtà la distanza fra la Terra e la Luna è variabile. La distanza media (da centro a centro) è di circa 384 000 km.

Il Sole e i pianeti

... problemi pre-
... due valori possibili.)

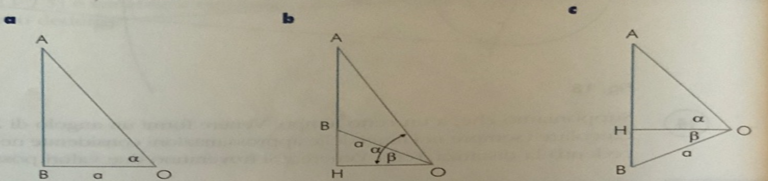
3.5 Distanze del mondo reale

Per muoverci nel mondo reale spesso abbiamo bisogno di conoscere distanze fra luoghi, di cui almeno uno inaccessibile.
In tali situazioni è evidente che non è possibile procedere a misure dirette; si ricorre allora alla misura diretta di distanze fra luoghi accessibili e alla valutazione dell'ampiezza di opportuni angoli. Per affrontare questi problemi pertanto si trattano i luoghi come punti e si determinano le distanze incognite riconoscendole come lati di triangoli che siamo in grado di risolvere mediante l'apporto della trigonometria (**metodo della triangolazione**).

Si possono presentare situazioni diverse che analizzeremo schematizzando il campanile, la torre, la montagna, ... con un segmento.

- Un estremo B dell'"oggetto" da misurare è accessibile.

Sul terreno l'osservatore si allontana da B ponendosi in un punto O, da cui sia visibile A, tale che $\overline{BO} = a$. I casi possibili sono i seguenti:



a OB è l'orizzontale per O nel piano OAB — **b** O è più basso di B — **c** O è più alto di B

Fig. 20

Si misurano α e β cioè le ampiezze degli angoli che rispettivamente OA e OB formano con l'orizzontale per O nel piano OAB.

> **NOTA** Quando l'oggetto si trova al di sopra del piano orizzontale, l'angolo che il raggio visivo forma con l'orizzontale per O viene detto **angolo di elevazione**; quando l'oggetto si trova al di sotto del piano orizzontale, si parla di **angolo di depressione**.

Nel caso **a**, poiché $\beta = 0$, risulta

$$\overline{AB} = a \tan \alpha.$$

Nel caso **b** si ha $\angle(B\widehat{A}O) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $\angle(B\widehat{O}A) = \alpha - \beta$. Poiché, per il teorema dei seni, vale la relazione

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

e inoltre $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, si ottiene

$$\overline{AB} = a\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

Nel caso **c** infine si ha $\angle(B\widehat{A}O) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $\angle(B\widehat{O}A) = \alpha + \beta$; dunque, sempre per il teorema dei seni, si ricava

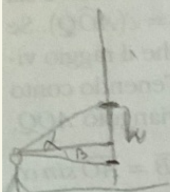
$$\overline{AB} = a\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha}$$

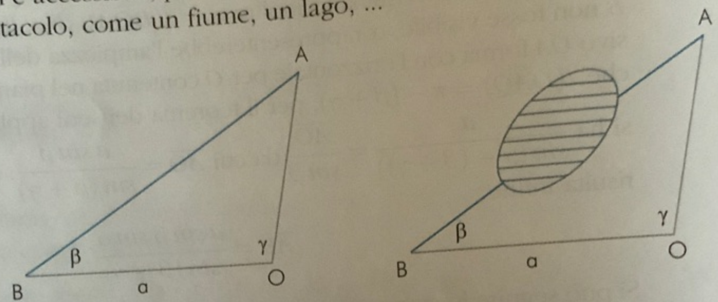
19 Distanza fra due punti di cui almeno uno sia accessibile

Anche in questo caso si devono considerare situazioni diverse. Indichiamo con A e B i punti di cui si deve esprimere la distanza.

sin α

- A non è accessibile, però è visibile da B; fra A e B può esserci o non esserci un ostacolo, come un fiume, un lago, ...





$= h_1 + h_2$

$= d\, tg\alpha + d\, tg\beta$

$(tg\alpha + tg\beta)$

Fig. 23

L'osservatore si pone in un punto O che disti a da B e tale che da esso sia visibile A. Si misurano le ampiezze β e γ rispettivamente degli angoli $A\hat{B}O$ e $A\hat{O}B$.

Per il teorema dei seni risulta $\dfrac{\overline{AB}}{sin\,\gamma} = \dfrac{a}{sin\,(\pi - (\beta + \gamma))}$ da cui

$$\overline{AB} = \frac{a\, sin\,\gamma}{sin\,(\beta + \gamma)}$$

- Tra A e B c'è un ostacolo (una casa, una collina, ...) per cui i due punti non sono visibili uno dall'altro; B è accessibile.

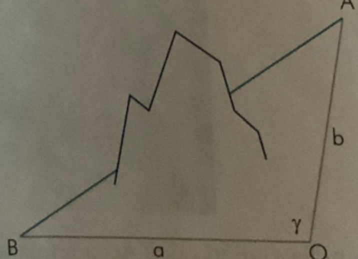


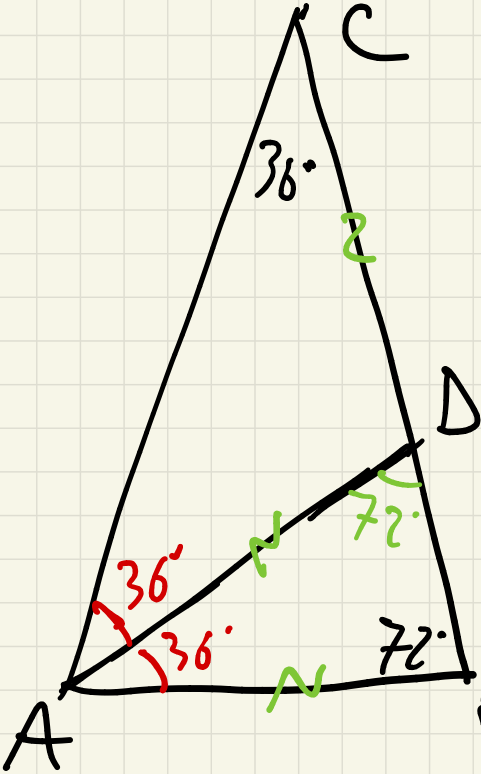
Fig. 24

L'osservatore si pone in un punto O da cui siano visibili A e B e misura la distanza a di B da O, l'ampiezza γ dell'angolo $A\hat{O}B$. Se anche A è accessibile, misura direttamente la distanza b di A da O; se A è inaccessibile, può determinare b con

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{10}}$$ (alias 18°)

Partiamo dal triangolo isoscele con angolo al vertice di 36° $\left(\frac{\pi}{5}\right)$ $\frac{\pi}{5}$ è $2\cdot\frac{\pi}{10}$ e lati di lunghezza 1.

Gli angoli alla base misurano entrambi 72° $\left(\frac{2}{5}\pi\right)$



tracciando la bisettrice di $\hat{A}$ e indicando con D il punto in cui essa interseca BC, otteniamo il triangolo $A\hat{B}D$ che ha anch'esso gli angoli di 36°, 72°, 72°. Perciò i tr. ABC e ABD sono SIMILI. Questo ci permette di scrivere:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

in cui sappiamo che $\overline{AC} = 1$

D'altra parte,

$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$$

e $\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{AB} = x$ che indicheremo con l'incognita x.

$$1 \cdot (1-x) = x^2$$

Allora $\frac{1}{x} = \frac{x}{(1-x)}$

e otteniamo l'equazione

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Risolvendola:

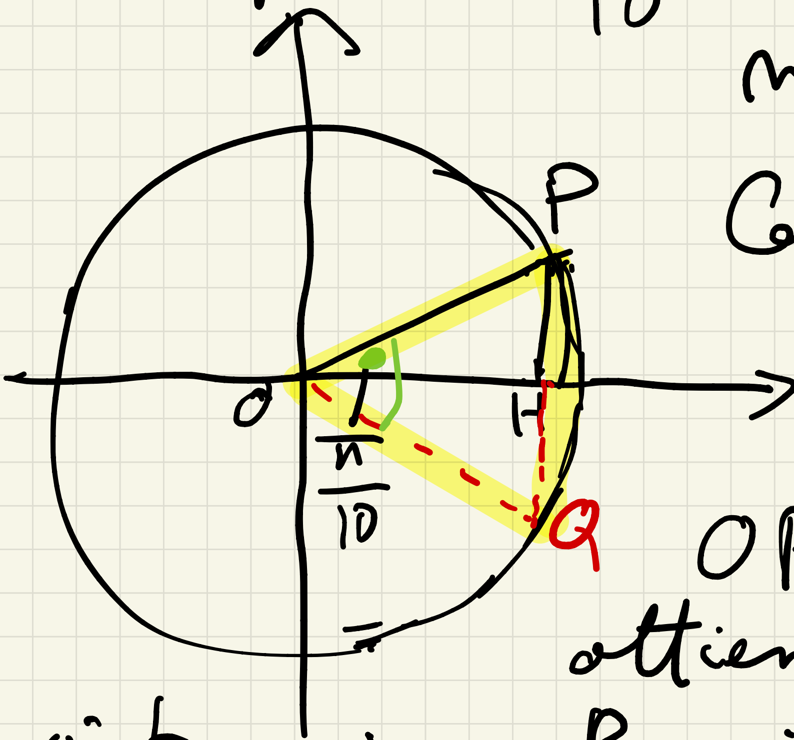
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ma essendo x la misura di un lato, ha senso solo il valore positivo:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Cioè la base del triangolo isoscele con angolo al vertice di $\frac{\pi}{5}$ misura $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Adesso trasferiamoci sulla circonferenza goniometrica e consideriamo l'angolo $\alpha = \frac{\pi}{10}$ che la metà di $\frac{\pi}{5}$



Costruendo il triangolo OPQ si ottiene il caso visto prima. Perciò $\overline{PH}$ è la <u>metà</u> di $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\overline{PH}$ è anche il $\sin\frac{\pi}{10}$

e concludiamo

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Facilmente si ricava il

$$\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

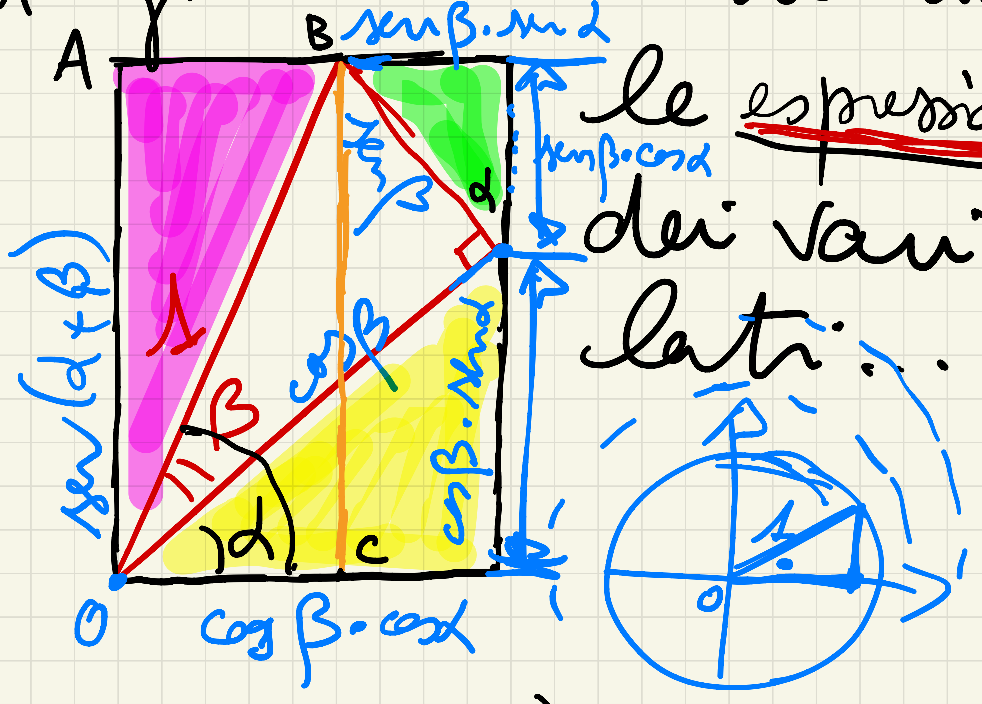
Facilmente anche:

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{10}\right) =$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}$$

UN ALTRO MODO di VEDERE le formule di addizione!

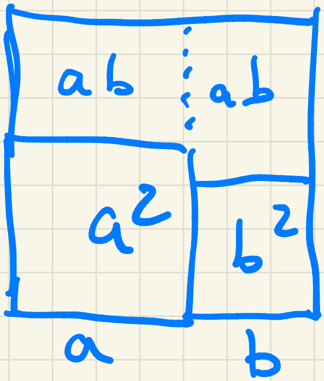
Partiamo con il triangolo rettangolo rosso e troviamo le espressioni dei vari lati...



$\overline{BC} = \overline{AO} = sen(\alpha+\beta)$

$sen(\alpha+\beta) = sen\beta \cdot cos\alpha + cos\beta \cdot sen\alpha$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



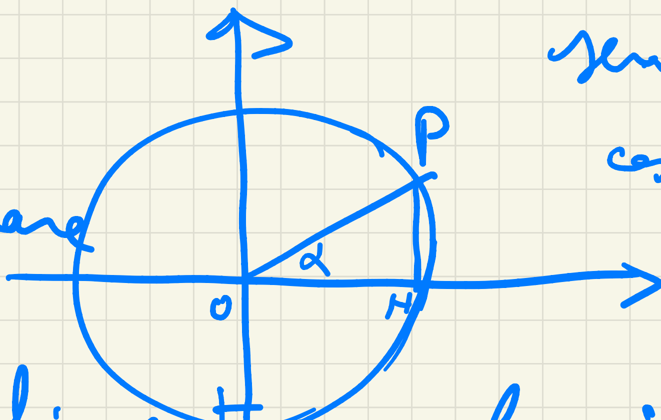
Dim $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$

sappiamo che $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{PH}}{1}$

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{OH}}{1}$

basta considerare la



disuguaglianza triangolare in $\widehat{OPH}$

$OP < \sin\alpha + \cos\alpha \Rightarrow 1 < \sin\alpha + \cos\alpha$

Esercizio 2.25

Seno e coseno di una serie di angoli: $x+\pi$, $\pi - x$, $\frac{\pi}{2} - x$

$\operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen} x \cdot \cos\pi + \cos x \cdot \operatorname{sen}\pi =$

$= \operatorname{sen} x \cdot (-1) + \cos x \cdot 0 = -\operatorname{sen} x$

Se considero i due angoli $(x+\pi)$ e x, tra di essi c'è una relazione particolare $\underline{(x+\pi) - x = \pi}$

$\cos(\pi - x) = \cos\pi \cdot \cos x + \operatorname{sen}\pi \cdot \operatorname{sen} x =$

$= -1 \cdot \cos x + 0 \cdot \operatorname{sen} x = -\cos x$

Se considero i due angoli $(\pi - x)$ e x, ho che $(\pi - x) + x = \pi$

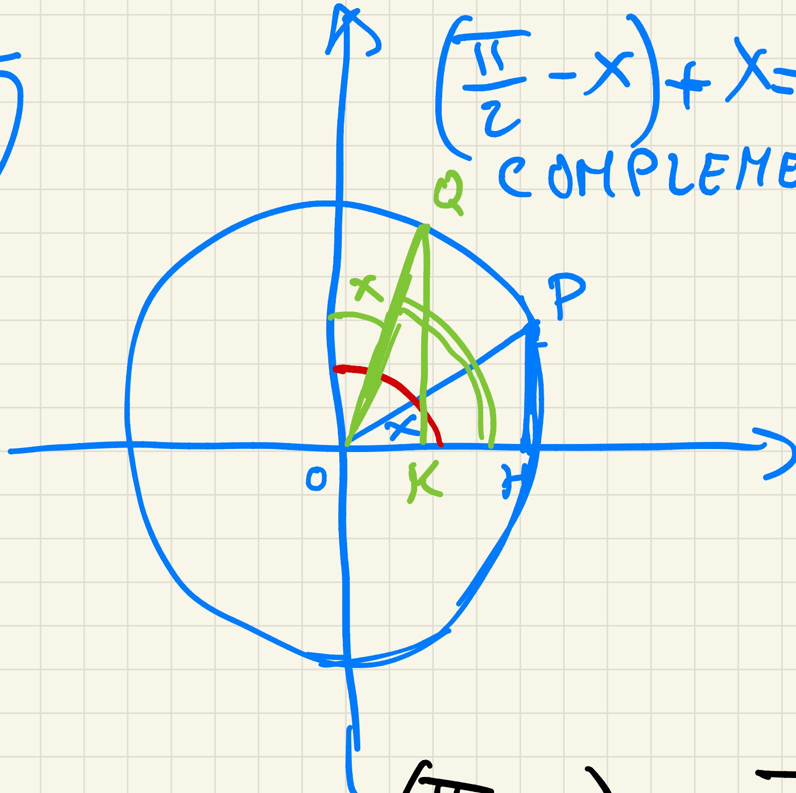
cioè ~~sono~~ sono SUPPLEMENTARI

$\frac{\pi}{2} - x$

x

$$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + x = \frac{\pi}{2}$$

COMPLEMENTARI

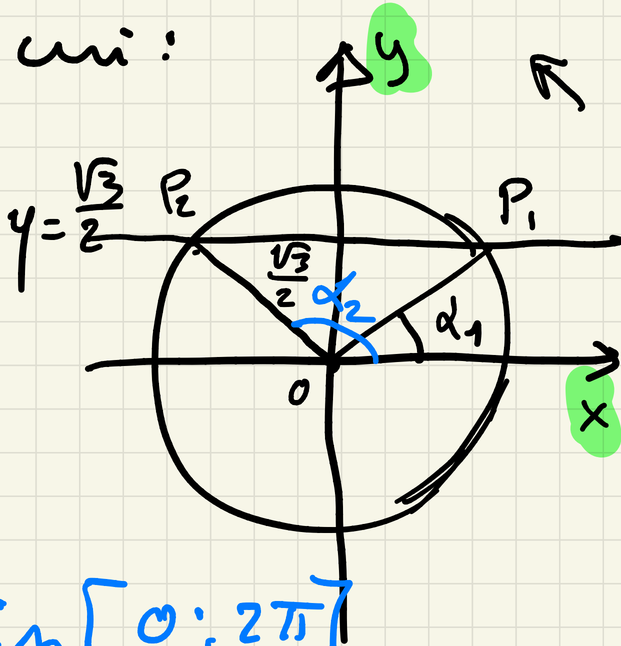


$$\overline{OH} = \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \overline{QK}$$

$$\overline{PH} = \operatorname{sen} x = \overline{OK} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Esercizio 2.27: determinare i valori di x per cui:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$x = \alpha_1$ o

$x = \alpha_2$

$x = \frac{\pi}{3} = \alpha_1$

$x = \frac{2}{3}\pi = \alpha_2$ in $[0; 2\pi]$

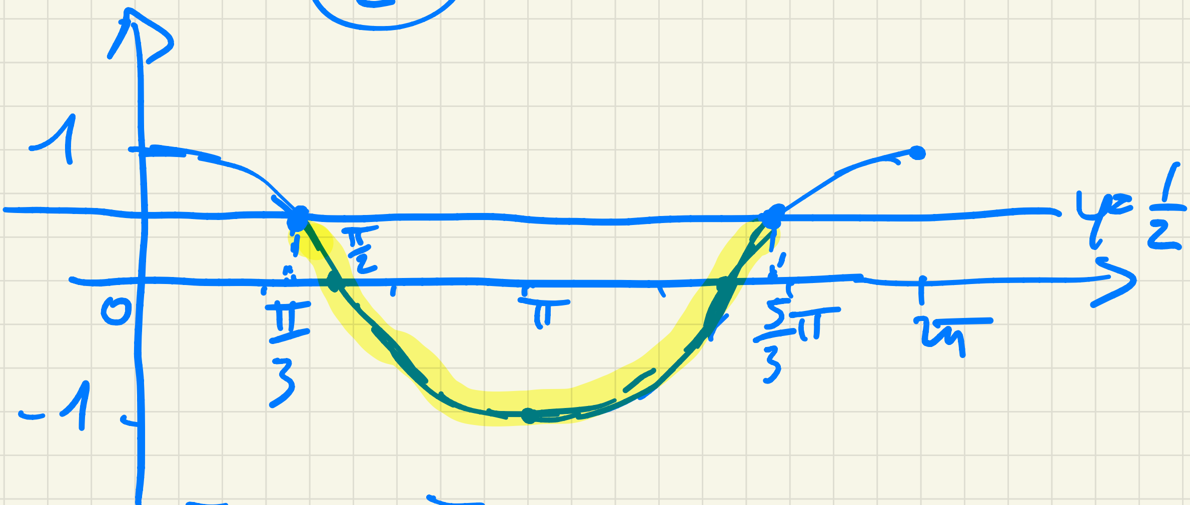
Oppure, se rispondiamo in $\mathbb{R}$,

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o

$k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

$\cos x \le \frac{1}{2}$



in $[0; 2\pi]$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5}{3}\pi$

c) $\sqrt{3}\sin x + 1 \cos x = 2$

l'espressione al I membro "assomiglia" al risultato di una formula di addizione.

Basta dividere tutto per 2.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x = 1$$

sviluppo della formula di addizione del seno

$$\cos\frac{\pi}{6} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \cos x = 1$$

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

questo significa che

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

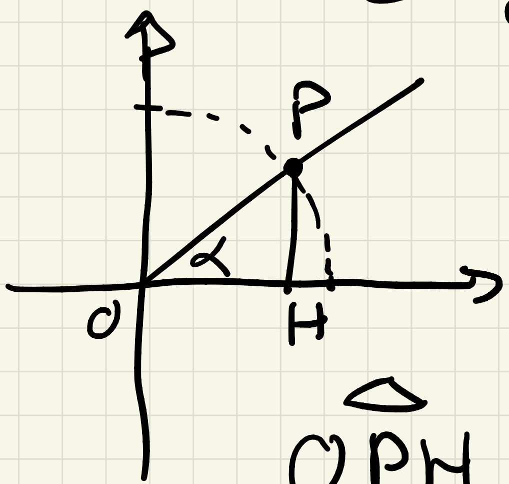
$$x = \frac{2}{6}\pi = \frac{\pi}{3}$$

Trigonometria e Disuguaglianza Triangolare

$\forall \alpha$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\sin\alpha + \cos\alpha > 1$$

Infatti



$\overline{PH} = \sin\alpha$

$\overline{OH} = \cos\alpha$

e nel triangolo $\widehat{OPH}$ deve valere la relazione $\overline{OP} < \overline{OH} + \overline{HP}$

cioè $1 < \cos\alpha + \sin\alpha$

$$\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}\overset{?}{=}\sin\frac{\pi}{2}$$

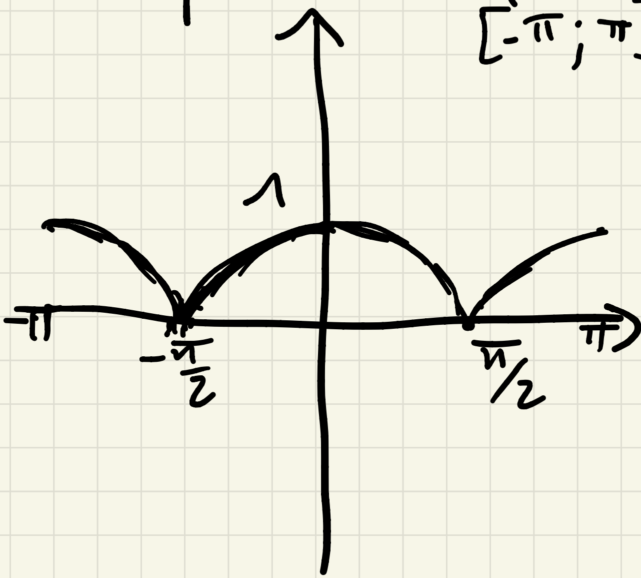
Quello rappresentato è il grafico della funzione (in $[-\pi;\pi]$)

A) $|\sin x|$

B) $-\sin x$

C) $|\cos x|$

D) $\cos(-x)$



Perché l'equazione

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

è certamente impossibile?

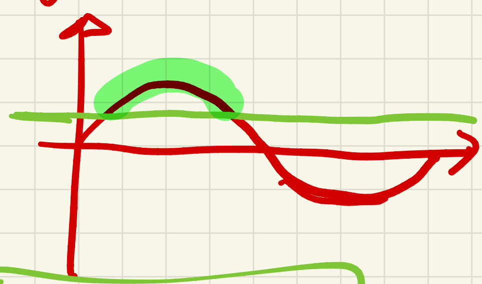
d) $1 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x > 1$

in generale, per trovare il coeff. per cui conviene dividere si fa: $\boxed{\sqrt{a^2+b^2}}$ dove a, b sono i coeff. di seno e coseno (per noi: 1 e 1)

$\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x}_{} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} < x < \pi}$$