DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

- La funzione ESPONENZIALE di base $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$

$$f(x) = a^x$$

a^x è l'unica funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ tale che:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(2) $a^1 = a$

dove $a > 0$, $a \neq 1$

<u>OSS</u>: Di solito, se $a = e = 2{,}718\ldots$ numero di Eulero, si parla di "funzione esponenziale" senza specificare la base.

Dalle proprietà (1) e (2) e dalla continuità seguono le altre:

(3) $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(4) $(a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

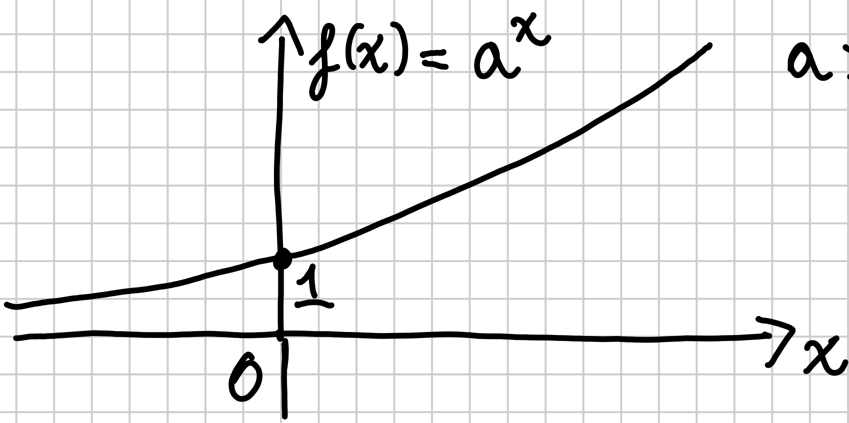
(5) a^x è strettamente crescente se $a > 1$

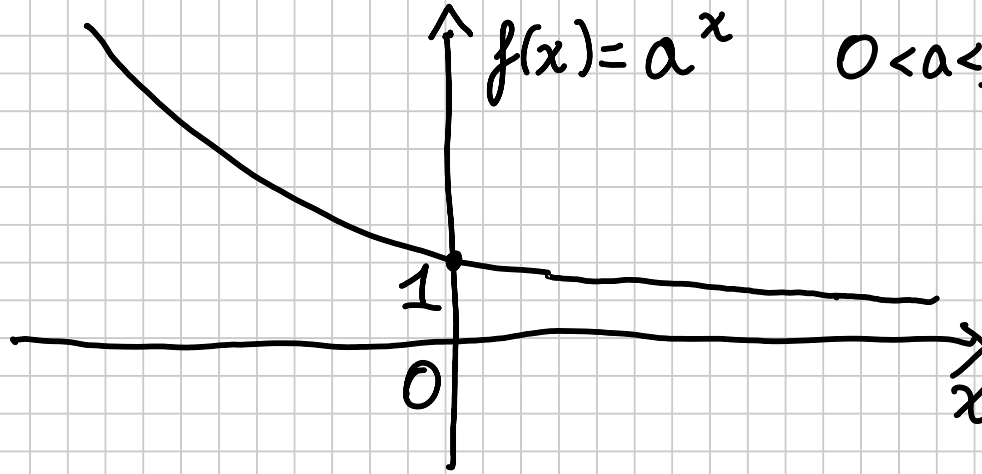
" " " decrescente se $0 < a < 1$

(6) $a^0 = 1 \quad \forall a > 0$

OSS: Quindi $a^x \uparrow$ se $a > 1$. Preso $a \in (0, 1)$, si ha $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} \uparrow \Rightarrow a^x \downarrow$

I grafici sono perciò:





• La funzione LOGARITMO in base $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$

$$f(x) = \log_a x$$

$\log_a x$ è l'inversa della funzione a^x, cioè

$\log_a (a^x) = x \quad$ e $\quad a^{\log_a x} = x$

$\log_a x$ è l'unica funzione continua in $(0, +\infty)$ tale che:

(1') $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \forall x, y \in (0, +\infty)$

(2') $\log_a(a) = 1 \qquad \forall a > 0,\ a \neq 1$

<u>OSS</u>: Di solito, se $a = e$ numero di Eulero, si parla di "funzione logaritmo" omettendo di specificare la base e si scrive $\log x$ al posto di $\log_e x$.

Dalle proprietà (1'), (2') e dalla continuità seguono le altre:

(3') $\log_a x \begin{cases} > 0 & \forall x > 1 \\ < 0 & \forall x \in (0,1) \end{cases} \qquad$ se $a > 1$

$\log_a x \begin{cases} < 0 & \forall x > 1 \\ > 0 & \forall x \in (0,1) \end{cases} \qquad$ se $a \in (0,1)$

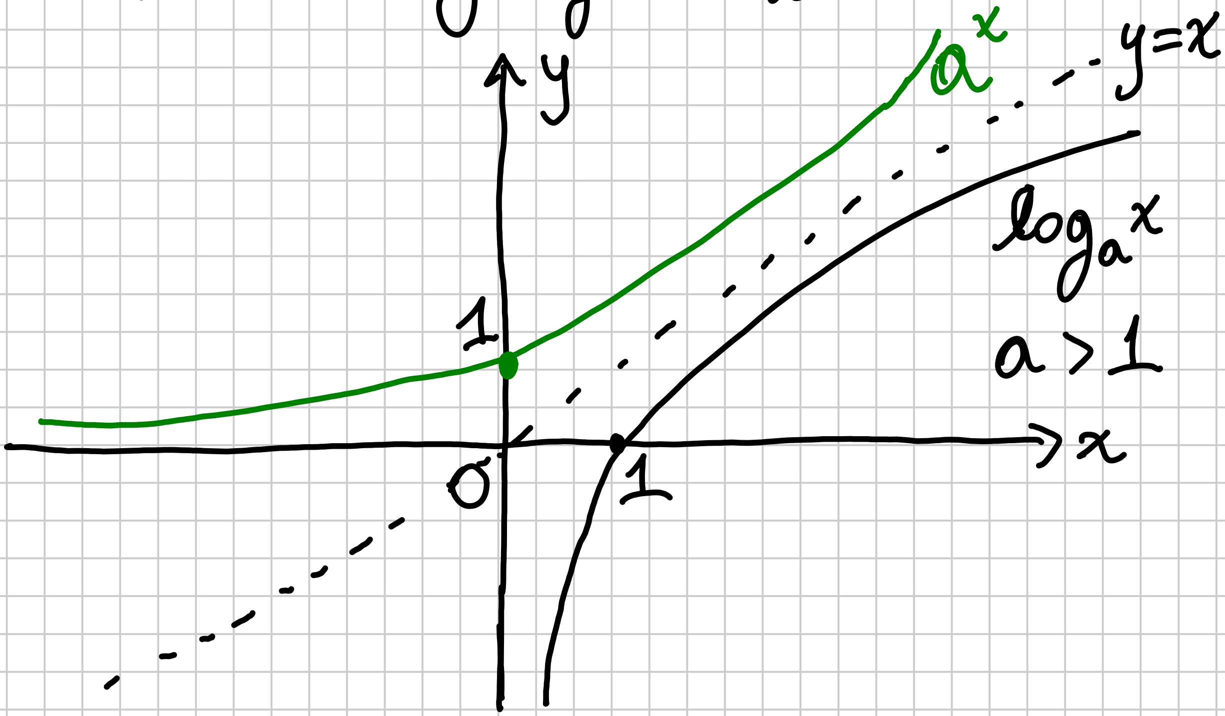
(4') $\log_a(x^y) = y\log_a x \quad \forall x>0,\ \forall y\in\mathbb{R}$

(5') $\log_a x$ è strettamente crescente se $a>1$

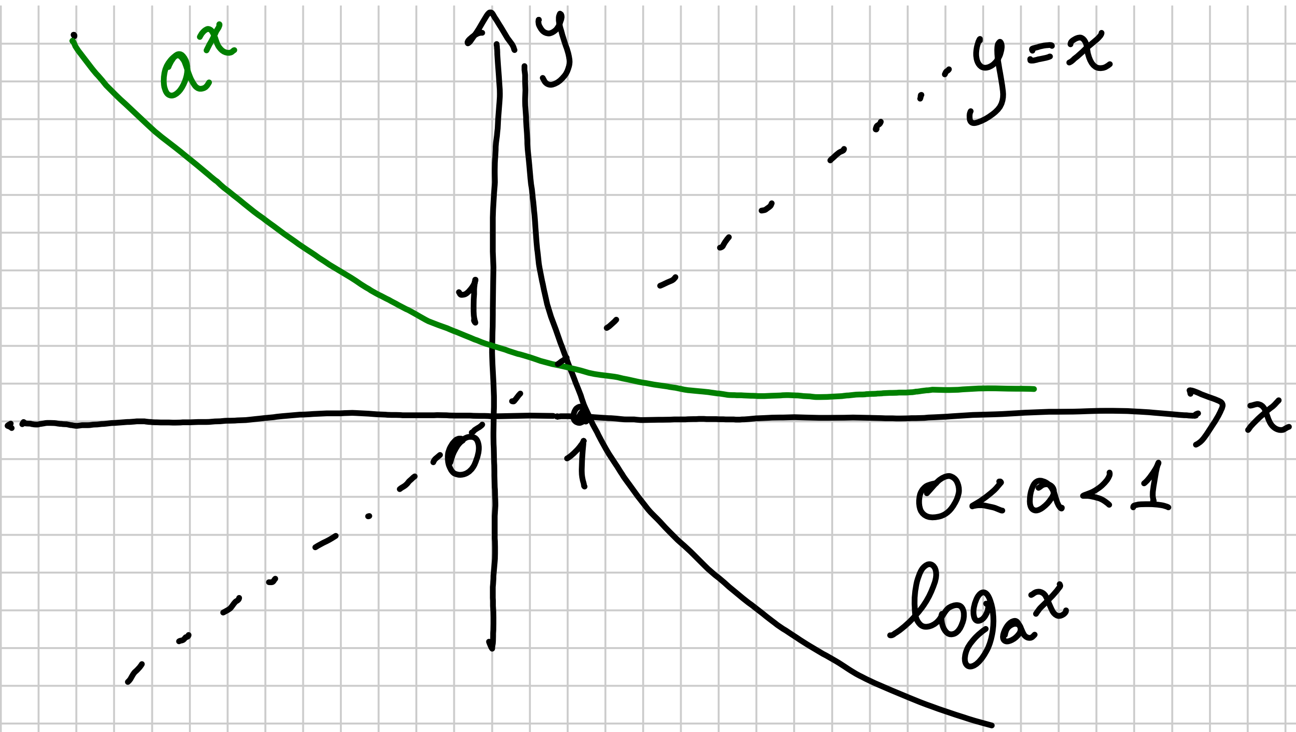
$\quad$ // $\quad$ // $\quad$ // $\quad$ decrescente se $0<a<1$

(6') $\log_a(1) = 0 \quad \forall a>0,\ a\neq 1$

Quindi i grafici sono:



Simmetrici rispetto alla retta $y=x$



Formule del cambio di base

Dato $a>0$, $a\neq 1$ e $b>0$, $b\neq 1$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad \forall x>0$$

$$a^x = \left(b^{\log_b a}\right)^x = b^{x \cdot \log_b a} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>ES</u>: Ordinare i numeri $\log_{\sqrt{2}} 4$, $\log_5 \frac{1}{10}$, $-\log_2 7$

<u>DIM</u>: Possiamo scrivere i numeri come segue:

$\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$, $\log_5 \frac{1}{10} = -\log_5 10$, $-\log_2 7$

Certamente $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$ perché $\sqrt{2}^4 = 2^2 = 4$

$$\log_5 \frac{1}{10} = \log_5 (10^{-1}) = -\log_5 10$$

Per il confronto di $-\log_5 10$ e $-\log_2 7$ porto $-\log_5 10$ in base 2:

$$-\log_5 10 = -\frac{\log_2 10}{\log_2 5}$$

e ci chiediamo se $-\dfrac{\log_2 10}{\log_2 5} > -\log_2 7 \iff$

$\iff -\log_2 10 > -\log_2 7 \cdot \log_2 5 \iff$

$\iff \log_2 10 < \log_2 7 \cdot \log_2 5 \iff$

$\iff \log_2 (2 \cdot 5) < \log_2 7 \cdot \log_2 5 \iff$

$\iff \log_2 2 + \log_2 5 < \log_2 7 \cdot \log_2 5 \iff$

$\iff 1 < \log_2 5 \cdot \log_2 7 - \log_2 5 \iff$

$\iff 1 < \log_2 5 \, (\log_2 7 - 1) \iff$

$\iff 1 < \log_2 5 \left(\log_2 2 + \log_2 \frac{7}{2} - 1\right) \iff$

$\iff 1 < \log_2 5 \left(\cancel{1} + \log_2 \frac{7}{2} \cancel{-1}\right) \iff$

$\iff 1 < \log_2 5 \cdot \log_2 \frac{7}{2}$

Ma $\log_2 5 > \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

$\log_2 \frac{7}{2} > \log_2 3 > \log_2 2 = 1$

e dunque $\log_2 5 \cdot \log_2 \frac{7}{2} > 2 \cdot 1 = 2 > 1$

Ne segue che $\log_5 \frac{1}{10} > -\log_2 7$

Quindi abbiamo che

$$4 > \log_5 \frac{1}{10} > -\log_2 7$$

<u>ES</u>: Risolvere l'equazione $10^x - 3^{x+1} = 0$

1° MODO: $10^x - 3^x \cdot 3 = 0 \iff 10^x = 3^x \cdot 3 \iff$

$\iff \frac{10^x}{3^x} = \frac{\cancel{3^x}}{\cancel{3^x}} \cdot 3 \iff \left(\frac{10}{3}\right)^x = 3 \iff$

$\iff x = \log_{\frac{10}{3}} 3$

2° MODO: $10^x = 3^x \cdot 3 \iff \log 10^x = \log(3^x \cdot 3)$

$\iff x \log 10 = \log 3^x + \log 3 \iff$

$\iff x \log 10 = x \log 3 + \log 3 \iff$

$\iff x(\log 10 - \log 3) = \log 3 \iff x = \frac{\log_3}{\log 10 - \log 3}$

$x = \log_{\frac{10}{3}} 3$

$\underline{ES}$: Risolvere l'equazione $4\log_4 x - \log_2(1+x) = 0$

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\begin{cases} \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \log_2 x - \log_2(1+x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2\log_2 x - \log_2(1+x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 - \log_2(1+x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 = \log_2(1+x) \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1+x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \\ x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Per introdurre queste disequazioni, è sufficiente osservare che:

- quando $a > 1$, $x < y < z < \ldots \Longleftrightarrow a^x < a^y < a^z < \ldots$

cioè l'esponenziale PRESERVA l'ordine

- quando $0 < a < 1$, $x < y < z \ldots \Longleftrightarrow a^x > a^y > a^z > \ldots$

si inverte l'ordine

Grazie a questa osservazione è semplice passare da una disequazione del tipo

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \qquad (\leq, >, \geq)$$

a una disequazione del tipo

$$f(x) < g(x) \qquad (\leq, >, \geq)$$

Considerazioni perfettamente analoghe valgono per $\log_a x$, che preserva l'ordine se $a>1$, mentre lo inverte quando $0<a<1$.

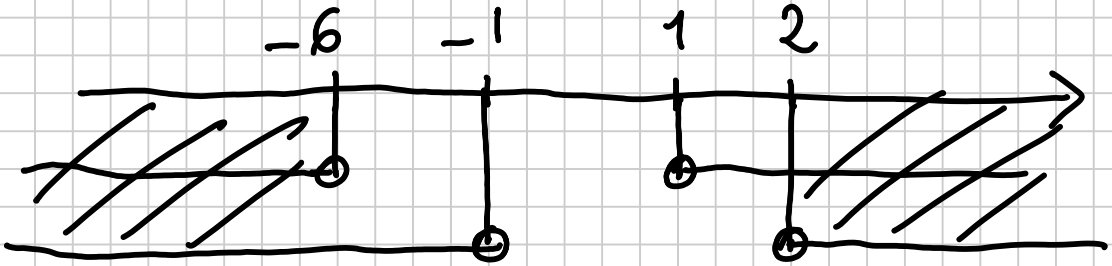
<u>ES</u>: Determinare le soluzioni di

$$\log(x^2+5x-6) > \log(3x^2-3x-6)$$

<u>DIM</u>: La prima cosa da vedere è dove esistono ambo i membri, cioè devo cercare per quali x

$$\begin{cases} x^2+5x-6>0 \\ 3x^2-3x-6>0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+6)(x-1)>0 \\ 3(x-2)(x+1)>0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x<-6 \ \vee \ x>1 \\ x<-1 \ \vee \ x>2 \end{cases}$$



quindi C.E.: $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$

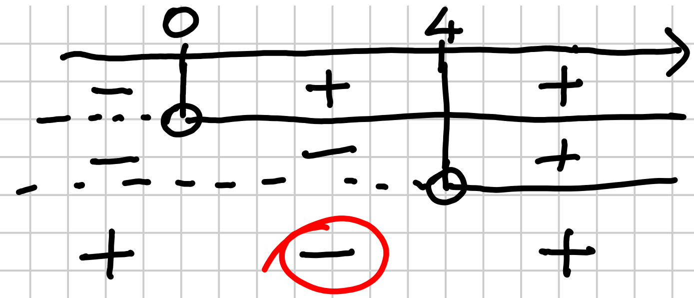
La disequazione equivale a

$$x^2-5x-\cancel{6} > 3x^2-3x-\cancel{6} \iff$$

$$\iff 2x^2-8x<0 \iff 2x(x-4)<0$$

$2x > 0 \iff x > 0$

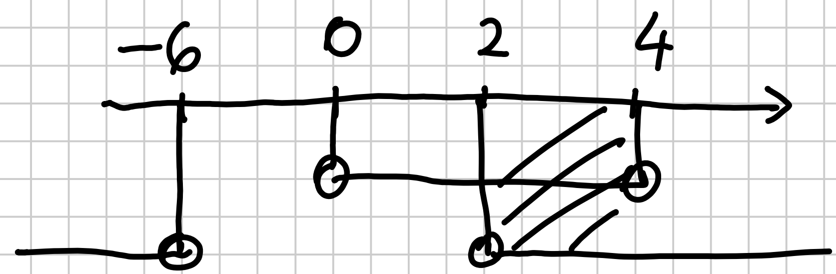
$x - 4 > 0 \iff x > 4$



$2x(x-4) < 0 \iff 0 < x < 4$

Infine

$$\begin{cases} 0 < x < 4 \\ x < -6 \ \vee \ x > 2 \end{cases}$$



Quindi la soluzione è $x \in (2,4)$.

<u>ES</u>: Determinare le soluzioni della disequazione

$$9^x + 2 \geq 3 \cdot 3^x$$

<u>DIM</u> La disequazione è equivalente a

$$3^{2x} - 3\cdot 3^x + 2 \geqslant 0$$

Porto $t = 3^x$, risolviamo la disequazione

$t^2 - 3t + 2 \geqslant 0 \iff (t-2)(t-1) \geqslant 0$

che ha per soluzione $\quad t \leqslant 1 \quad \vee \quad t \geqslant 2$

ma $t = 3^x$, e quindi $\quad 3^x \leqslant 1 \quad \vee \quad 3^x \geqslant 2$

che diventa $\quad x \leqslant \log_3 1 \quad \vee \quad x \geqslant \log_3 2$

$$x \leqslant 0 \quad \vee \quad x \geqslant \log_3 2$$

Quindi le soluzioni sono $x \in (-\infty, 0] \cup [\log_3 2, +\infty)$.