Trigonometria Elementare

Molto importante il materiale sino alle formule di duplicazione.

Le formule di bisezione si possono vedere come esercizio

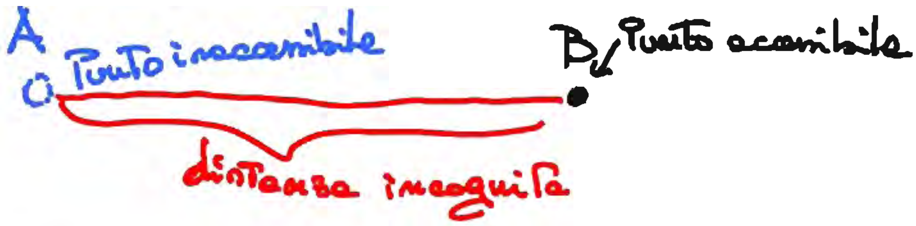
Le formule di Prostaferesi sono un complemento

Esprimere le funzioni Trigonometriche con una sola di esse è un esercizio

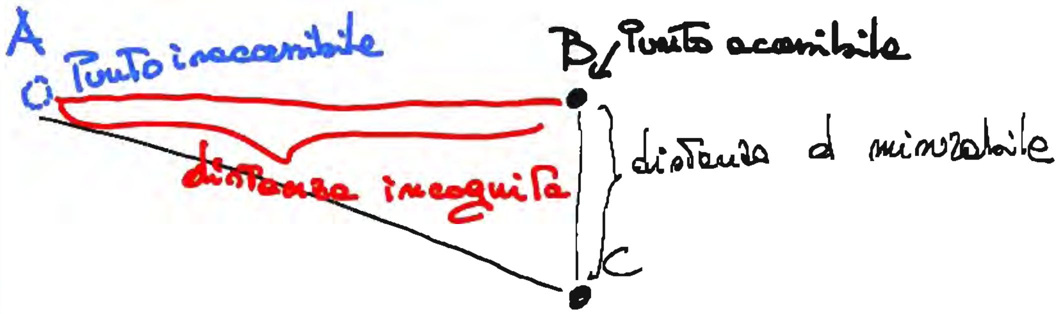
Vedere le coordinate polari e in particolare calcolare (x,y) dati (ρ,θ)

D3 pp. 12 in avanti esercizi

Problema: come calcolare la distanza di un oggetto inaccessibile a partire da una posizione accessibile?



1° passo: introduco un secondo punto accessibile C



e poi misuro tre quantità relative al triangolo ABC

- la distanza $d(B,C)$
- l'angolo $A\hat{B}C$
- l'angolo $B\hat{C}A$

Noti questi valori, posso calcolare $C\hat{A}B = \pi - A\hat{B}C - B\hat{C}A$
e posso calcolare $d(A,B)$ che desideravo calcolare
(si osservi che se ho l'accortezza di prendere BC perpendicolare a AB, allora $d(A,B) = d(B,C)\cdot Tg(C\hat{A}B)$)

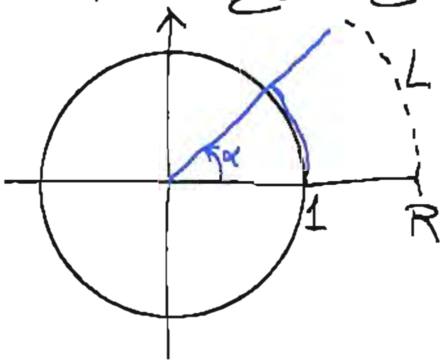
Naturalmente questo è solo un piccolo esempio pratico: è possibile calcolare la distanza tra due punti inaccessibili! (dovremo introdurre due punti accessibili etc...)

Se ad esempio voglio calcolare la distanza Terra-luna potrei procedere come sopra

Con un poco di Trigonometria Eratostene calcolò la misura della circonferenza terrestre

L'obiettivo della trigonometria è la risoluzione dei triangoli, e procede associando ad ogni angolo α due quantità, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$

Primo passo: gli angoli sono espressi in radianti



Dato un angolo α, fissato un raggio R si tracci la porzione di circonferenza di raggio R sottesa da questo angolo, sia L

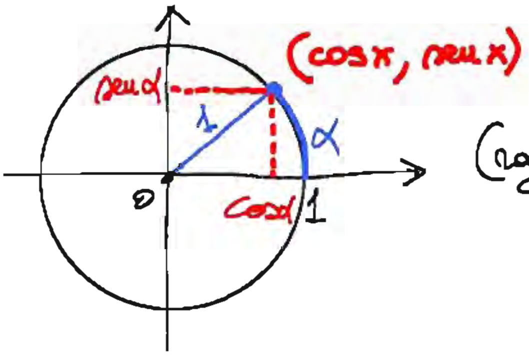
L/R = il valore in radianti di α

In particolare, quando $R=1$, il valore in radianti dell'angolo è la lunghezza.

Ne segue che vale la seguente corrispondenza

Gradi	Radianti	Gradi	Radianti
30°	$\pi/6$	210°	$\frac{7}{6}\pi$
45°	$\pi/4$	225°	$5/4\,\pi$
60°	$\pi/3$	240°	$4/3\,\pi$
90°	$\pi/2$	270°	$3/2\,\pi$
120°	$2/3\,\pi$	300°	$5/3\,\pi$
135°	$3/4\,\pi$	315°	$7/4\,\pi$
150°	$5/6\,\pi$	340°	$11/6\,\pi$
180°	π	360°	2π

SEN(x) e COS(x)



Preso il punto sulla circonferenza trigonometrica (raggio 1 centrata nell'origine) corrispondente all'angolo α (ovvero quando si è percorso un tratto di lunghezza α sulla circonferenza)

questo punto ha come coordinate

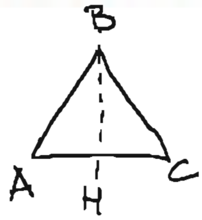
$$(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

In tal modo si scopre che (si esamini il triangolo rettangolo di cateti $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ e diagonale 1)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \forall\alpha$$

per il teorema di Pitagora!!

Calcolo di sen x e cos x per alcuni angoli noti



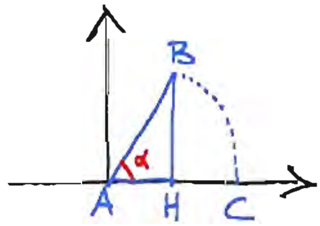
Preso il triangolo equilatero $\overset{\triangle}{ABC}$ di lato 1,

si ha che $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \pi/3$

inoltre $A\hat{B}H = H\hat{B}C = \pi/6$

e infine $\overline{AH} = \overline{HC} = 1/2$ e $\overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

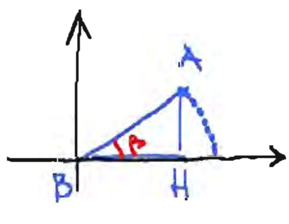
Ne segue che



$\boxed{\alpha = \pi/3}$

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \overline{AH} = 1/2$$

$$\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\beta = \frac{\pi}{6}$

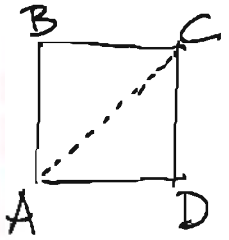
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\beta$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \overline{AH} = 1/2 = \sin\beta$$

N.B. Si osservi che $\operatorname{sen}(\pi/3) = \cos(\pi/6)$

" " " $\operatorname{sen}(\pi/6) = \cos(\pi/3)$

Si consideri il quadrato di lato $1/\sqrt{2}$ $\overset{\square}{ABCD}$

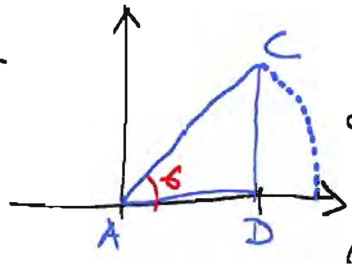


Si ha $\overline{AC} = 1$

$A\hat{C}D = D\hat{A}C = \pi/4$

$\hat{D} = \pi/2$

Ne segue che



$\gamma = \frac{\pi}{4}$

$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \overline{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \overline{CD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = 0 \longmapsto \cos 0 = 1$

$\operatorname{sen} 0 = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \longmapsto \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

In particolare quando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $\quad 0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

$0 \leq \cos x \leq 1$

Quando $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ si ha

$0 < \operatorname{sen} x < 1$

$-1 < \cos x < 0$

Quando $x = \pi$ si ha $\operatorname{sen}\pi = 0$

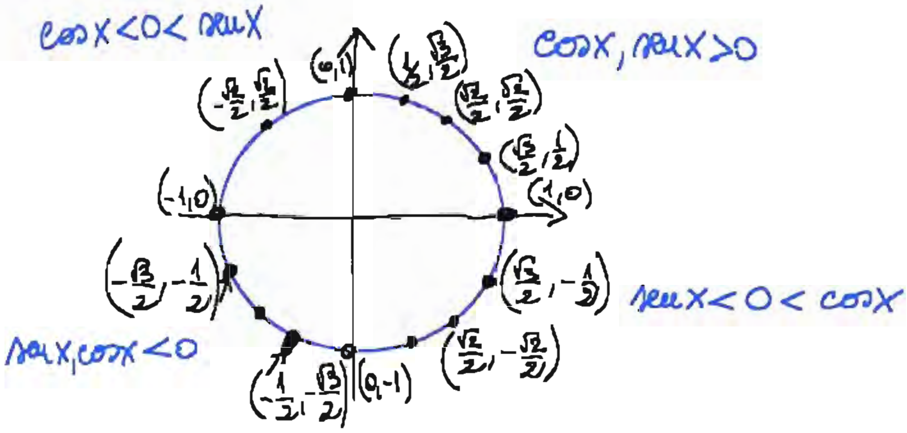
$\cos\pi = -1$

Quando $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ si ha $-1 < \operatorname{sen} x < 0$

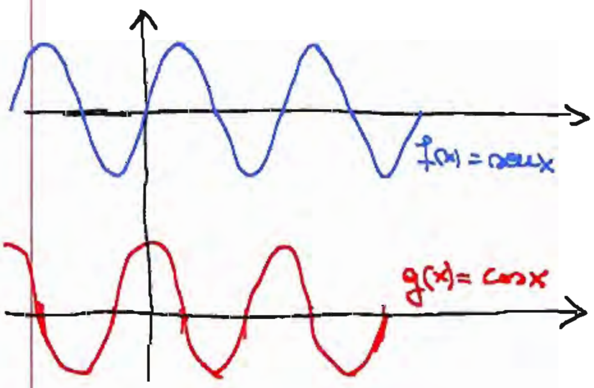
$-1 < \cos x < 0$

Quando $x = \frac{3}{2}\pi$ si ha $\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1$ $\quad \cos\frac{3}{2}\pi = 0$

Quando $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ si ha $-1 < \operatorname{sen} x < 0$
$0 < \cos x < 1$



Il grafico delle funzioni è il seguente



Si osserva che

$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

Parità del $\cos x$ $\underset{Def}{\equiv}$ $\cos(x) = \cos(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Disparità del $\operatorname{sen} x$ $\underset{Def}{\equiv}$ $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Periodicità di $\operatorname{sen} x$ $\underset{Def}{\equiv}$ la funzione è 2π-periodica

$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x+4\pi) = \operatorname{sen}(x+2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{R}$

Periodicità di $\cos x$ $\underset{Def}{\equiv}$ la funzione è 2π-periodica

$\cos(x) = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \cos(x+2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{R}$

La funzione $Tg(x)$ $\underset{Def}{\equiv}$ $\forall x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi$
$\forall k \in \mathbb{Z}$

$$Tg(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

è una funzione π periodica

Formule della somma (IMPORTANTE) 6

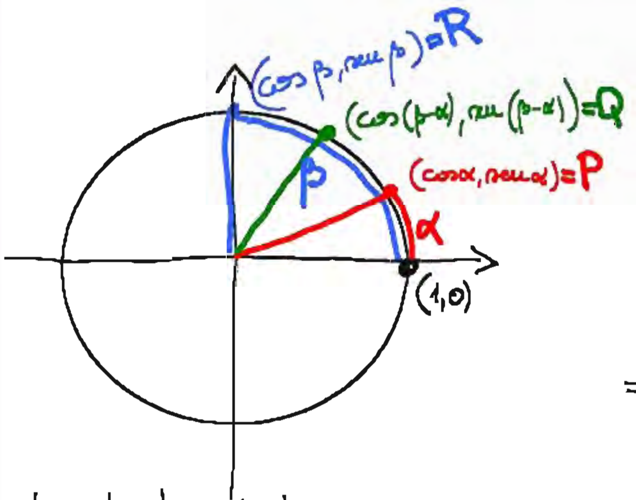
Si dimostra che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

dim.

Proviamo che $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$



$$d(Q,(1,0)) = \sqrt{(\cos(\beta-\alpha)-1)^2 + (\operatorname{sen}(\beta-\alpha))^2}$$

$$= \sqrt{(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha)^2} = d(R;P)$$

elevando al quadrato

$$\Rightarrow \cancel{2} - 2\cos(\beta-\alpha) = \cancel{2} - 2\cos\beta\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$$

Da questa si deduce, posto $\beta = y$ e $\alpha = -x$

$$\cos(y+x) = \cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= \cos y\cos(-x) + \operatorname{sen} y\operatorname{sen}(-x) \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}x!$$

$$= \cos y\cos x - \operatorname{sen}y\operatorname{sen}x$$

$$\operatorname{sen}(y+x) = \cos\left(y+x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos y\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}y\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos y\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y(-\cos x)$$

$$= \operatorname{sen}x\cos y + \cos x\operatorname{sen}y$$

come pure, posto $y=\beta$ e $x=-\alpha$

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha) = \operatorname{sen}(y+x) = \operatorname{sen}x\cos y + \cos x\operatorname{sen}y$$

$$= \operatorname{sen}(-\alpha)\cos\beta + \cos(-\alpha)\operatorname{sen}\beta$$

$$= -\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$= \operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \cos\beta\operatorname{sen}\alpha$$

Formule di duplicazione

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x\cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

dim utilizzando le formule precedenti

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x+x) = \operatorname{sen}x\cos x + \cos x\operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}x\cos x$$

Analogamente si ragiona per il $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Inoltre $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (1-\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$$= \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \quad \blacksquare$$

Formule di bisezione (ESERCIZIO)

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

Vedi la dim. Vedi la dim.

dim

$$\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}} & \text{quando } 2k\pi \le \dfrac{x}{2} \le (2k+1)\pi \quad k\in\mathbb{Z} \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}} & \text{"} \quad (2k+1)\pi < \dfrac{x}{2} < (2k+2)\pi \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

analogamente $\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \dots = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

da cui segue

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$$

e dunque

$$\cos\frac{x}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}} & -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \le \dfrac{x}{2} \le \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}} & \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \le \dfrac{x}{2} \le \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$k\in\mathbb{Z}$ $\blacksquare$

Esempio Calcolare $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ e $\cos\frac{\pi}{12}$

Esprimere le funzioni trigonometriche in funzione di $\operatorname{sen} x$ (di $\cos x$, di $\operatorname{tg} x$)

(FACOLTATIVO)

In funzione di $\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen} x$

$$\cos x = \begin{cases} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} & \text{se } \cos x \geq 0 \\ -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} & \text{se } \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}} & \text{se } \operatorname{tg} x > 0 \\ -\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}} & \text{se } \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}$$

In funzione di $\cos x$

$$\operatorname{sen} x = \begin{cases} \sqrt{1-\cos^2 x}, & \text{se } \operatorname{sen} x \geq 0 \\ -\sqrt{1-\cos^2 x}, & \text{se } \operatorname{sen} x < 0 \end{cases}$$

$\cos x$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}} & \operatorname{tg} x \geq 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}} & \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}$$

In funzione di $\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}} & \text{se } \operatorname{tg} x \geq 0 \\ -\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}} & \text{se } \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}} & \text{se } \operatorname{tg} x \in [0, +\infty[\\ -\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}} & \text{se } \operatorname{tg} x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

Analogamente si ottiene

$$\cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}} = \dots = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{Tg}^2 x}} & \text{se } \cos x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{Tg}^2 x}} & \text{se } \cos x < 0 \end{cases}$$

Formule parametriche: esprimere $\operatorname{sen} x, \cos x$ e $\operatorname{Tg} x$ in funzione di $t = \operatorname{Tg}\frac{x}{2}$ **(FACOLTATIVO)**

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{Tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

dim

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \overset{\cos\frac{x}{2}\neq 0}{=} \frac{2\operatorname{Tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{Tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \overset{\cos\frac{x}{2}\neq 0}{=} \frac{1-\operatorname{Tg}^2\frac{x}{2}}{t^2+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{Tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{2t}{\cancel{1+t^2}} \cdot \frac{\cancel{1+t^2}}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2} \qquad t = \operatorname{Tg}\frac{x}{2}$$

5 Tangente di una somma

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{Tg}\alpha + \operatorname{Tg}\beta}{1-\operatorname{Tg}\alpha\operatorname{Tg}\beta} \qquad \forall \alpha,\beta : \operatorname{Tg}\alpha\operatorname{Tg}\beta \neq 1$$

$$\operatorname{Tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} \cdot \frac{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\operatorname{Tg}\alpha + \operatorname{Tg}\beta}{1-\operatorname{Tg}\alpha\operatorname{Tg}\beta}$$

N.B. $\operatorname{Tg}(2x) = \dfrac{2\operatorname{Tg} x}{1-\operatorname{Tg}^2 x}$ (vedi le formule parametriche)

Formule di Prostaferesi (FACOLTATIVO)

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

dim

dati due angoli α e β, si possono considerare $\frac{\alpha+\beta}{2}$ e $\frac{\alpha-\beta}{2}$ e si ha che, ad esempio

$$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

e sommando/sottraendo

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Analogamente

$$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

e sommando/sottraendo

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

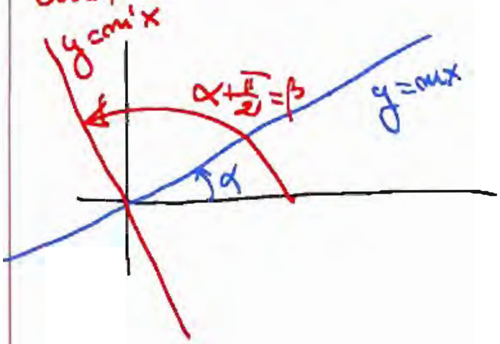
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

N.B. A che pro queste formule? Servono per trasformare le somme in prodotti, e sono utilissime per provare che $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$ sono continue

QS N.B. Date due rette di coefficienti angolari m ed m', 11

queste sono $\perp$ (perpendicolari) se $m \cdot m' = -1$

dim



$m = \operatorname{Tg}\alpha$

$m' = \operatorname{Tg}\beta$

ma se le voglio perpendicolari allora $= \frac{\pi}{2}+\alpha$ necessariamente

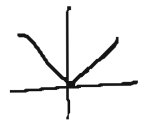
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Tg}x + \operatorname{Tg}\alpha}{1-\operatorname{Tg}x\operatorname{Tg}\alpha} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\operatorname{Tg}x}}{\cancel{\operatorname{Tg}x}} \frac{1+\frac{\operatorname{Tg}\alpha}{\operatorname{Tg}x}}{\frac{1}{\operatorname{Tg}x}-\operatorname{Tg}\alpha}$$

$$= \frac{1}{-\operatorname{Tg}\alpha}$$

ovvero, essendo $m' = \operatorname{Tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\dfrac{1}{\underbrace{\operatorname{Tg}\alpha}_{=m}} = -\dfrac{1}{m}$

$\Rightarrow m \cdot m' = -1$ ▥

L'equazione $\operatorname{sen}\varphi = h$



l'equazione $\operatorname{sen}\varphi = h$ non ha una soluzione unica

infatti, se $\exists\, \bar{\vartheta} \in [0,2\pi[\,:\ \operatorname{sen}\bar{\vartheta} = h$ allora

- a) necessariamente $-1 \leq h \leq 1$
- b) " $\operatorname{sen}(\pi-\bar{\vartheta}) = h$
- c) $\operatorname{sen}(\bar{\vartheta}+2k\pi) = \operatorname{sen}\bar{\vartheta}\cos(2k\pi) + \operatorname{sen}(2k\pi)\cos\bar{\vartheta}$

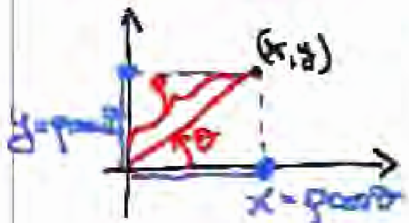
$= \operatorname{sen}\bar{\vartheta}$

$= h = \operatorname{sen}(\pi-\bar{\vartheta}+2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

ovvero $\bar{\vartheta}+2k\pi$ e $(\pi-\bar{\vartheta})+2k\pi$ sono le ∞ soluzioni al variare di $k \in \mathbb{Z}$ ▥

N.B. E' vero o falso che le soluzioni di $\begin{cases} \operatorname{sen}\vartheta = \operatorname{sen}\varphi \\ \cos\vartheta = \cos\varphi \end{cases}$ sono $\vartheta = \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$? e perché?

Coordinate Polari (Cenni)



Preso un punto $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$
se consideriamo
$\rho = d(P,(0,0))$
θ = angolo, misurato senso antiorario, formato da PO con il semiasse positivo delle ascisse

allora è immediato calcolare

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$ ovvero le coordinate (x,y) del punto P

Viceversa, dato un punto P di coordinate x, y è agevole calcolare

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

mentre calcolare θ è un poco più difficile poiché

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{se } 0<x \text{ e } 0\le y \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \text{ e } 0<y \\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{se } x<0 \\ 3\frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \text{ e } y<0 \\ 2\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{se } 0<x \text{ e } y<0 \end{cases}$$

5 **Esercizio 2.21** : traducete in radianti la misura degli angoli la cui ampiezza, espressa in gradi, è pari a 180°, 60°, −45°, 105°.

Dobbiamo costruire la proporzione
(Angolo in gradi) : 360° = (Angolo in radianti) : 2π
e dunque

$$180^\circ : 360^\circ = x : 2\pi \Rightarrow x = 2\pi\cdot\frac{180^\circ}{360^\circ} \Rightarrow x = \pi$$

Analogamente $60^\circ \to \frac{\pi}{3}$, $-45^\circ \to -\frac{\pi}{4}$ (o $\frac{7}{4}\pi$) e $105^\circ \to \frac{7}{12}\pi$

Esercizio 2.22 : traducete in grad. la misura degli angoli la cui ampiezza, espressa in radianti, è pari a $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12}$

Dobbiamo costruire la corrispondenza

$$(\text{angolo in radianti}) \longrightarrow (\text{angolo in gradi})$$

osservato che

$$(\text{Angolo radianti}) : 2\pi = (\text{Angolo gradi}) : 360$$

ovvero

$$(\text{Angolo in gradi}) = (\text{Angolo in radianti}) \cdot \frac{360}{2\pi}$$

In tal modo

$$-\frac{\pi}{6} \longmapsto \frac{180}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -30^\circ, \text{ ovvero } -\frac{\pi}{6} \longrightarrow 330^\circ$$

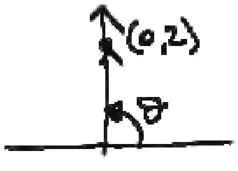
(in quanto $-\pi/6$ e $\frac{11}{6}\pi$ rappresentano, in radianti, lo stesso angolo).

$$\frac{7}{2}\pi \longrightarrow \frac{7}{2}\pi \cdot \frac{360}{2\pi} = 630^\circ = 360^\circ + 270^\circ$$

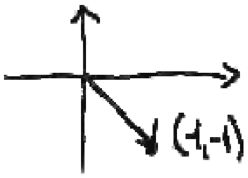
$$\frac{3}{4}\pi \longrightarrow \frac{3}{4}\pi \cdot \frac{360}{2\pi} = 135^\circ$$

$$\frac{\pi}{12} \longrightarrow \frac{\pi}{12} \cdot \frac{360}{2\pi} = 15^\circ$$

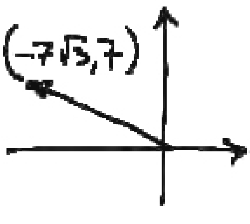
Esercizio 2.23 : determinate le coordinate polari dei punti che hanno coordinate cartesiane $(0,2)$, $(1,-1)$, $(-7\sqrt{3},7)$, $(-5,0)$.



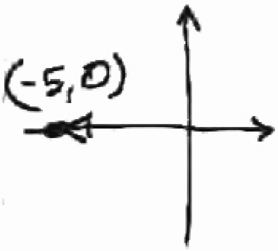
$$\rho = \sqrt{2^2} = 2$$
$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ovvero} \quad (0,2) \longrightarrow \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\rho = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$
$$\vartheta = 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{-1}{1} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$
ovvero $(1,-1) \longmapsto \left(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi\right)$



$$\rho = \sqrt{(-7\sqrt{3}-0)^2 + (7-0)^2} = 7\sqrt{3+1} = 14$$
$$\vartheta = \pi + \operatorname{arctg}\frac{7}{-7\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$
ovvero $(-7\sqrt{3}, 7) \longrightarrow \left(14, \frac{5}{6}\pi\right)$



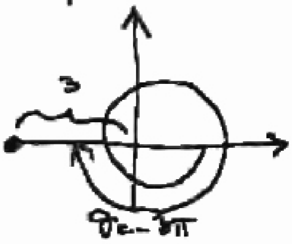
$\rho = 5$

$\vartheta = \pi + \operatorname{arctg} \frac{0}{-5} = \pi$

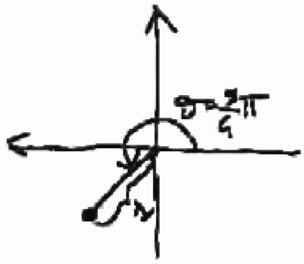
ovvero $(-5,0) \longrightarrow (5,\pi)$ ▥

5 **Esercizio 2.24** : determinate le coordinate cartesiane dei punti che hanno coordinate polari (ϱ, ϑ) uguali a $(2, \pi/3)$, $(3, -3\pi)$, $(1, 5\pi/4)$, $(6, 23\pi/6)$

$(2, \pi/3) \longrightarrow \left(2\cos\frac{\pi}{3}, 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = (1, \sqrt{3})$

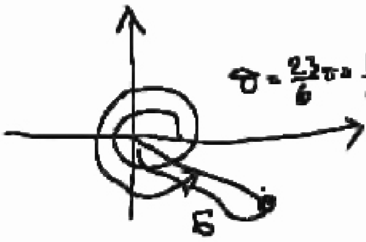


$(3, -3\pi) \longrightarrow \left(3\cos(-3\pi), 3\operatorname{sen}(-3\pi)\right) = (-3, 0)$



$\left(1, \frac{5}{4}\pi\right) \longrightarrow \left(\cos\frac{5}{4}\pi, \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\vartheta = \frac{23}{6}\pi = \frac{12}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi = \frac{24}{6}\pi - \frac{\pi}{6}$



$\left(6, \frac{23}{6}\pi\right) \longrightarrow \left(6\cos\frac{23}{6}\pi, 6\operatorname{sen}\frac{23}{6}\pi\right)$

$= \left(6\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), 6\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \left(6\cos\frac{\pi}{6}, -6\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = (3\sqrt{3}, -3)$ ▥

QS **Esercizio 2.25** : trovate la legge per ottenere seno e coseno degli angoli $-x$, $x+\pi$, $\pi-x$ e $\frac{\pi}{2}-x$ sapendo seno e coseno di x.

$\operatorname{sen} x$ è dispari, e dunque $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

(deve ancora essere definita, ma si può intuire)

$\cos x$ è pari, e dunque $\cos(-x) = \cos x$

$$\operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen} x \cos\pi + \operatorname{sen}\pi \cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(x+\pi) = \cos x \cos\pi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\pi = -\cos x$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos x - \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{2} = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

S **Esercizio 2.26** : determinate seno, coseno e tangente degli angoli di ampiezza $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$.

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{7}{3}\pi = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{7}{3}\pi = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi = -1 \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \quad \left(\text{ed è } <0 \text{ in quanto } \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}\quad\left(<1=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\,!\right)$$

Q5 **Esercizio 2.27** : determinate i valori di x per cui si ha:

a) $\mathrm{sen}\, x=\sqrt{3}/2$

b) $\cos x\leq 1/2$

c) $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x+\cos x=2$

d) $\mathrm{sen}\, x-\cos x>1$ ← domani

a) $\mathrm{sen}\, x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Graficamente

e quindi $\theta=\frac{\pi}{3}$ e $\pi-\theta=\frac{2}{3}\pi$ sono le due soluzioni in $[0,2\pi[$.

Se voglio TUTTE le soluzioni devo prendere

$$\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2}{3}\pi+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$$

b) $\cos x\leq\frac{1}{2}$ Graficamente

$\cos x=\frac{1}{2}$ quando

$\theta=\frac{\pi}{3}$ e $\theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$

La soluzione della 2) in $[0,2\pi[$ è data da

$$\left[\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi\right]$$

mentre se voglio Tutte le soluzioni devo prendere

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5}{3}\pi+2k\pi\right]$$

c) $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x+\cos x=2$

Si cercano le soluzioni di $\begin{cases}\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x+\cos x=2\\ \mathrm{sen}^2 x+\cos^2 x=1\end{cases}$

ovvero, posto $\operatorname{sen} x = A$ e $\cos x = B$, si ha

$$\begin{cases} \sqrt{3}A + B = 2 \\ A^2 + B^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 2 - \sqrt{3}A \\ A^2 + 4 + 3A^2 - 4\sqrt{3}A = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ 4A^2 - 4\sqrt{3}A - 3 = 0 \end{cases}$$

$$A_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad B = 2 - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

Dunque $A = \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $B = \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pi/3$

Quindi tutte le soluzioni sono date da $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{sen} x - \cos x > 1$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos x = 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A - B = 1 \\ A^2 + B^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ B^2 + 1 + 2B + B^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ 2B^2 + 2B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ o } \pi + 2k\pi$$

La disuguaglianza è falsa in $[0, \frac{\pi}{2}]$ ove $\operatorname{sen} x, \cos x > 0$

$[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ " " " < 0

$[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ " $\operatorname{sen} x - \cos x < 0$

Resta da esaminare l'intervallo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. In questo intervallo si ha $\cos x = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$, e dunque la disuguaglianza diventa

$$\operatorname{sen} x - \cos x = \operatorname{sen} x + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} > 1$$

ovvero

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} > 1 - \operatorname{sen} x \qquad x \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi]$$

ovvero

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} > 1 - \operatorname{sen} x = \left(\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}\right)^2 \quad x \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi]$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} > \sqrt{1 - \operatorname{sen} x} \quad x \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi]$$

ma quest'ultima disuguaglianza è banalmente vera poiché $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow 1 \geq \operatorname{sen} x \geq 0 \Rightarrow 1 + \operatorname{sen} x > 1 > 1 - \operatorname{sen} x \Rightarrow$

$\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} \geq 1 \geq \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$

Appendice

$\operatorname{sen}\vartheta = \operatorname{sen}\varphi \Leftrightarrow \quad \vartheta = \varphi + 2k\pi \quad \text{o} \quad \vartheta = \pi - \varphi + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$\cos\vartheta = \cos\varphi \Leftrightarrow \quad \vartheta = \varphi + 2k\pi \quad \text{o} \quad \vartheta = -\varphi + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

però

$\begin{cases} \cos\vartheta = \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\vartheta = \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$ sse $\vartheta = \varphi + 2k\pi$ o $\begin{cases} \vartheta = \pi - \varphi + 2k\pi \\ \vartheta = -\varphi + 2k\pi \end{cases}$

$k \in \mathbb{Z}$

sse $\vartheta = \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

in quanto $\begin{cases} \vartheta = \pi - \varphi + 2k\pi \\ \vartheta = -\varphi + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$ non ha soluzioni