Geometria Analitica

distanza tra due punti
equazione di una retta (parametrica; per due punti; in forma esplicita; in forma implicita)
rette parallele e fascio improprio di rette
fascio proprio e rette perpendicolari
distanza punto-retta
Circonferenza
Parabola, fuoco, direttrice, vertice, asse
Retta tangente alla parabola (2 intersezioni che collassano in 1 solo)
Retta tangente alla circonferenza (2 intersezioni che collassano in 1 solo)

N.B. La ricerca della retta tangente ad una circonferenza si può limitare alla osservazione sulla $\perp$ tra retta tg e diametro.
La costruzione della parabola come luogo geometrico può essere omessa.

Lo spazio $\mathbb{R}^2 \equiv_{Def} \mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$

Distanza tra due punti $P=(x,y)$ e $Q=(z,w) \in \mathbb{R}^2$

$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,+\infty[$ è così definita

$$d\big((x,y),(z,w)\big) = \sqrt{(x-z)^2+(y-w)^2}$$

i) $d(P,Q) \geq 0 \ \forall P,Q$; $d(P,Q)=0$ sse $P=Q$

ii) $d(P,Q) = d(Q,P) \ \forall P,Q$

iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) \ \forall P,Q,R$

disuguaglianza triangolare

Esercizio dati i tre punti

$$P=(0,0) \quad Q=(3,0) \quad R=(3,4)$$

i) calcolare $d(P,Q)$ $d(P,R)$ e $d(Q,R)$

ii) verificare la disuguaglianza triangolare

equazione retta passante per $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$ $\equiv_{Def}$

che la retta esista unica segue dagli assiomi di Euclide

1° modo per trovare equazione (parametrica)

$$P(t) = (x(t),y(t)) = t\cdot P + (1-t)Q \qquad t \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$(x(t),y(t)) = (tx_1, ty_1) + ((1-t)x_2, (1-t)y_2)$$

$(x(t),y(t))$ è il punto che si muove sulla retta, e una combinazione lineare di P e Q

ovvero

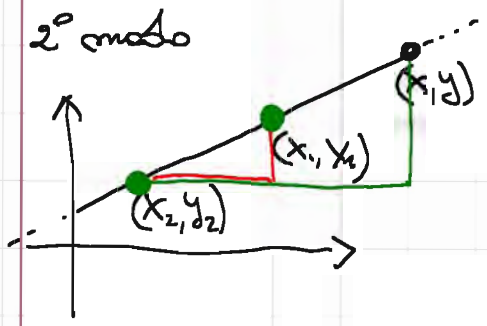
$$\begin{cases} x(t) = tx_1 + (1-t)x_2 \\ y(t) = ty_1 + (1-t)y_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Supponendo $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ si ottiene

scompare t? perché?

$$\begin{cases} \dfrac{x(t)-x_2}{x_1-x_2} = t \\ \dfrac{y(t)-y_2}{y_1-y_2} = t \end{cases} \Longrightarrow \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \quad (**)$$

2° modo



Il triangolo rosso e quello verde sono tra loro simili, e dunque

$$(x-x_2):(x_1-x_2) = (y-y_2):(y_1-y_2)$$

da cui si ricava

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \quad (**)$$

N.B. L'espressione $(*)$ della retta per due punti si può scrivere anche se $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, mentre per $(**)$ bisogna fare dei distinguo

N.B. L'espressione $(*)$, quando $t \in [0,1]$, permette di parametrizzare il segmento $\overline{PQ}$

Esercizio: Calcolare l'equazione della retta

- passante per $P \equiv (-2,-1)$ e $Q = (1,-3)$
- " " $P = (-1,1)$ e $Q = (1,-2)$
- " " $P = (1,-2)$ e $Q = (2,2)$
- " " $P = (-2,1)$ e $Q = (2,1)$
- " " $P = (2,3)$ e $Q = (2,5)$

(m) : coefficiente angolare di $y = mx + q$

è l'indicatore della "pendenza" di $y = mx + q$

Esempio data $y = -3x + 2$

quando x passa da 2 a 3

allora y " " -4 a -7

N.B. Data la retta per due punti (x_1, y_1) (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$, il coefficiente angolare

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

N.B. La retta di equazione $x = 5$ ha coefficiente angolare $m = \pm\infty$ (non è definito per queste rette)

Fascio di rette (proprio) passanti per il punto $(\bar{x}, \bar{y})$?

$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$ al variare di $m \in \mathbb{R}$

a cui devo unire anche la retta $x = \bar{x}$ (corrisponde a $m = \pm\infty$)

Esercizio : Calcolare l'equazione della retta passante per $P = (1,2)$ e $Q = (2,3)$

dim : Il fascio di rette passante per $P = (1,2)$ ha equazione

$$y - 2 = m(x - 1)$$

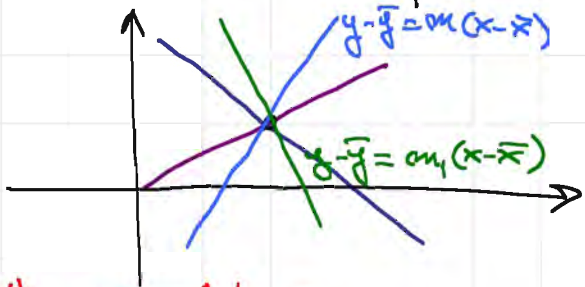
Tra queste rette voglio quella (l'unica) passante per $(2,3)$ ovvero impongo

$$3 - 2 = m(2 - 1) \Rightarrow m = 1$$

Ne segue che $y - 2 = x - 1$ ovvero $\boxed{y = x + 1}$ è l'equazione cercata

N.B il coefficiente angolare della retta passante per (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è la tangente dell'angolo α

orientato in senso antiorario, formato dalla retta r con il semiasse positivo $x>0$.



fascio di rette centrato in $(\bar{x},\bar{y})$

rette parallele $\equiv_{Def}$ $r: y=mx+q$ e $r': y=m'x+q'$ sono parallele se $\{(x,y): y=mx+q\}\cap\{(x,y)\ y=m'x+q'\}=\phi$

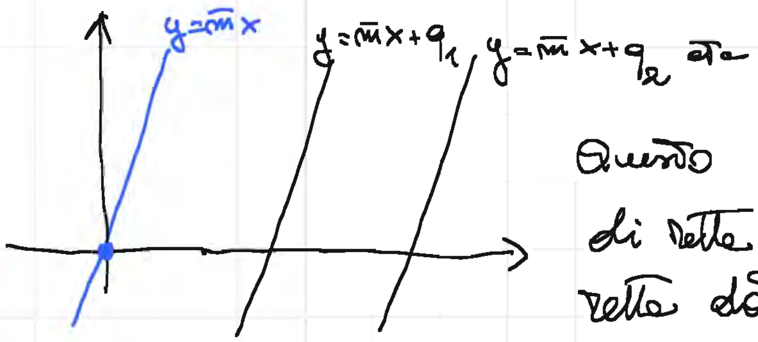
ovvero se $\begin{cases} y=mx+q \\ y=m'x+q' \end{cases}$ non ha soluzioni

ovvero se $m=m'$ e $q\neq q'$

Serve per distinguere rette parallele da rette coincidenti!

Esempio $r: y=3x-1$ $r': y=3x+2$ sono due rette parallele (= coefficiente angolare ma $q=-1\neq 2=q'$)

fascio (improprio) di rette parallele a $y=mx+q$ $\equiv_{Def}$ è l'insieme delle rette $\{y=\bar{m}x+q\ :\ q\in\mathbb{R}\}$



Questo è un insieme di rette parallele alla retta data.

Esercizio Scrivere l'equazione della retta passante per $(1,10)$ e // alla retta $y=2x+5$

il punto $(1,10)$

dim. Il fascio improprio di rette // a r è dato da $y=2x+q$ $q\in\mathbb{R}$

Impongo che la retta del fascio passi per $(1,10)$ ed ottengo la condizione $10=2+q \Rightarrow q=8$

La retta cercata ha equazione $y=2x+8$ ///

$r: y = mx + q$ e $r': y = m'x + q$ sono perpendicolari se

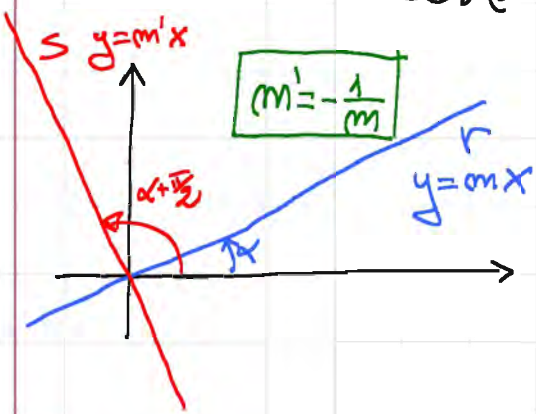
$$m \cdot m' = -1$$

Osservazione Se r ed s sono perpendicolari, e m ed m' sono i rispettivi coefficienti angolari allora

$m = Tg(\alpha)$ mentre $m' = Tg(\alpha + \frac{\pi}{2})$ (formano angolo $\frac{\pi}{2}$)

e dunque

$$m' = Tg\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{cos\alpha}{-sen\alpha} = -\frac{1}{Tg\alpha} = -\frac{1}{m}$$



Esercizio Data la retta $r: y = 2x$, determinare la retta s passante per $P \equiv (2,5)$ perpendicolare a r

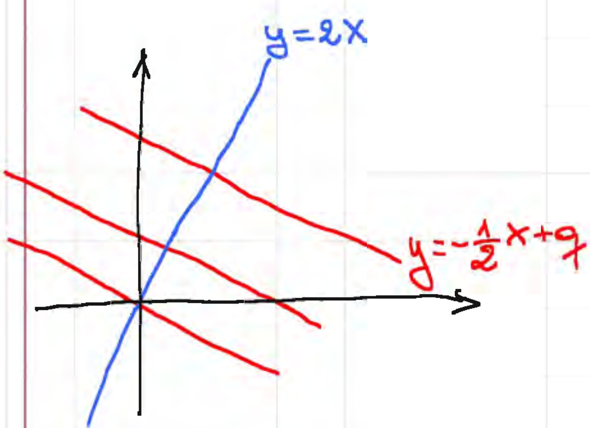
dim.

1° modo: prendo il fascio improprio di rette perpendicolari a r

$$y = -\frac{1}{2}x + q \quad q \in \mathbb{R}$$

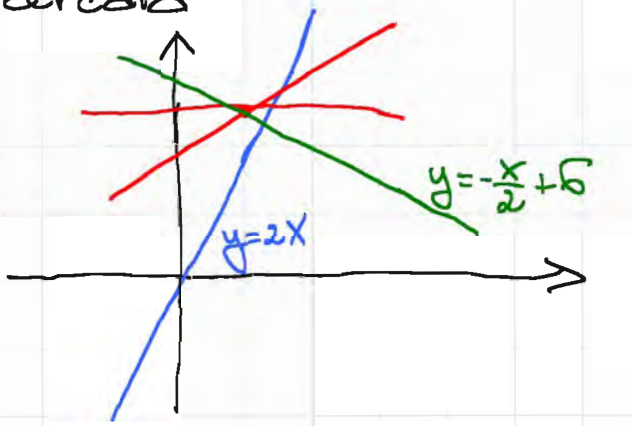
e determino quella che passa per P, ovvero impongo $\quad 5 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + q \Rightarrow q = 6$

ovvero $s: \; y = -\frac{1}{2}x + 6$



Secondo modo: prendo le rette del fascio centrato in $(2,5)$ ovvero $y-5=m(x-2)$

Impongo ora che $2\cdot m=-1$ ovvero $m=-\frac{1}{2}$, dunque $y=-\frac{x}{2}+1+5$ cioè $y=-\frac{x}{2}+6$ è la retta cercata



N.B. il punto P, nell'esercizio precedente, non sta sulla retta r, ovvero $P\notin r$.

Osservazione: l'equazione di una retta si può scrivere anche come segue

$$r:\ ax+by+c=0$$

Una retta parallela a r sarà

$$s:\ ax+by+c'=0 \quad \text{con} \quad c'\neq c$$

Una retta s perpendicolare $(\perp)$ a r sarà

$$t:\ -bx+ay+c''=0$$

ovvero

$$t:\ bx-ay-c''=0$$

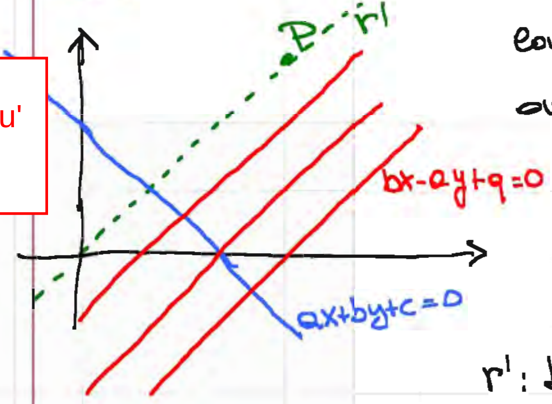
e non ci sono vincoli su c''!

Data una retta $r:\ ax+by+c=0$ e un punto $P\notin r$

$$d(P,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ distanza (minima) tra P ed r

Non e' la dimostrazione piu' veloce, ma e' elementare!

dim Sia data $r: ax+by+c=0$ e $P=(x_0,y_0)$



Consideriamo $bx-ay+q=0$

ovvero il fascio di rette $\perp$ a r

Impongo il passaggio per P

$$bx_0-ay_0+q=0$$

ovvero $q=ay_0-bx_0$ e trovo

$$r': bx-ay+ay_0-bx_0=0$$

retta $\perp$ a r passante per P_0

Interseco r con r' $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx-ay+ay_0-bx_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abx+b^2y+bc=0 \\ abx-a^2y+a^2y_0-abx_0=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} '' \\ y(b^2+a^2)+bc-a^2y_0+abx_0 \end{cases} \qquad \bar{y}=\frac{a^2y_0-bc-abx_0}{a^2+b^2}$$

$$\begin{cases} a^2x+aby+ac=0 \\ b^2x-aby+aby_0-b^2x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a^2+b^2)+ac+aby_0-b^2x_0=0 \\ '' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}=\dfrac{b^2x_0-ac-aby_0}{a^2+b^2} \\ \bar{y}=\dfrac{a^2y_0-bc-abx_0}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$Q=(\bar{x},\bar{y})$ punto di $\cap$ tra r ed r'

Allora $d(P,r)=d(P,Q)$

$$d^2(P,Q)=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left\{\left(\cancel{b^2x_0}-ac-aby_0-a^2x_0-\cancel{b^2x_0}\right)^2+\left(\cancel{a^2y_0}-bc-abx_0-\cancel{a^2y_0}-b^2y_0\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left\{a^2(ax_0+by_0+c)^2+b^2(ax_0+by_0+c)^2\right\}$$

$$=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2} \Rightarrow d(P,r)=d(P,Q)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \blacksquare$$

Oss ($d(P,r)$ come minimo) $Q=\left(x,-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)$ è il punto su r

e $d^2(P,Q)=(x-x_0)^2+\left(-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}-y_0\right)^2=$

$$=(x-x_0)^2+\frac{1}{b^2}(by_0+ax+c)^2$$

$$=\frac{1}{b^2}\left(b^2x^2+b^2x_0^2-2b^2xx_0+b^2y_0^2+a^2x^2+c^2+2aby_0x+2bcy_0+2acx\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(d^2(P,Q)\right)=\frac{1}{b^2}\left(2b^2x-2b^2x_0+2a^2x+2aby_0+2ac\right)=0$$

$$x(b^2+a^2)-(b^2x_0-aby_0-ac)=0$$

$$x=\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2}$$

e quindi, sostituendo ed estraendo la radice, si ha la tesi $\blacksquare$

Esercizio Data la retta $r: y = 3x - 5$ e il punto $P \equiv (1,2)$, calcolare $d(r,P)$

dim

r ha equazione $y - 3x + 5 = 0$

Inoltre $P \notin r$ (altrim. $d(P,r) = 0$!)

e si ha

$$d(P,r) = d(r,P) = \frac{|1 - 3\cdot 1 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \blacksquare$$

Circonferenza di centro (x_0,y_0) e raggio R $\stackrel{\equiv}{D}$

luogo dei punti (x,y) equidistanti da (x_0,y_0)

$$d((x,y),(x_0,y_0)) = R \iff \boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2}$$

Osservazione: l'equazione di una circonferenza

- non contiene termini in xy
- i coefficienti dei termini x^2 e y^2 sono $=$
- il termine di grado 0 è $x_0^2 + y_0^2 - R^2$

Esercizio determinare l'equazione della circonferenza centro $(1,2)$ e raggio 5

dim $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + (1 + 4 - 25) = 0 \quad \blacksquare$$

Esercizio data l'equazione $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$

1- provare che è una circonferenza

2- determinarne il raggio

dim

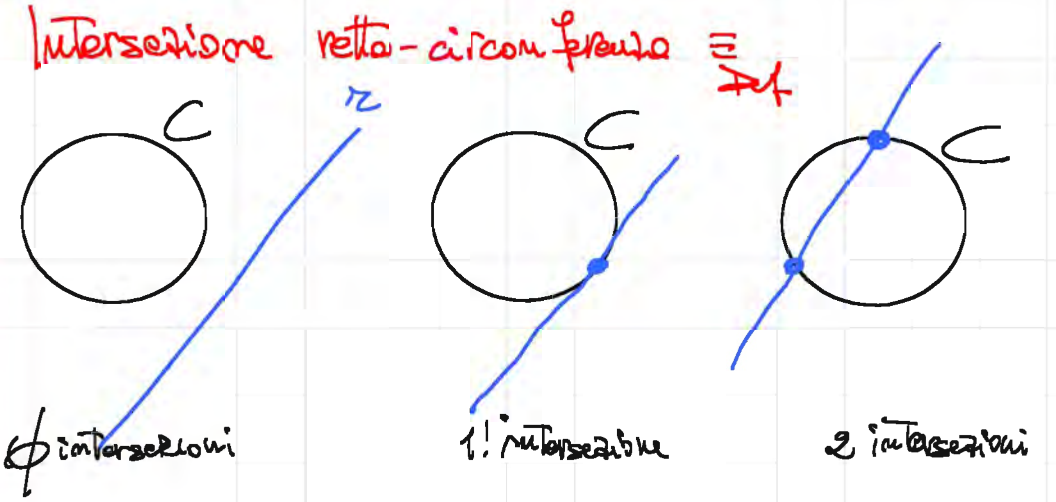
$(x^2 - 2x) + (y^2 - 6y) - 6 = 0$ equivale a

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) - 6 - 1 - 9 = 0$ equivale a

$$(x-1)^2+(y-3)^2=16$$

ovvero è una circonferenza di centro $(1,3)$ e raggio 4

Intersezione retta-circonferenza $\equiv_{Def}$



Cerchio centrato in (x_0,y_0) raggio $R \equiv_{Def}$

$$\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq R^2\}$$

in questo caso il cerchio contiene anche la circonferenza

Parabola con asse // asse $x \equiv_{Def}$ $y=ax^2+bx+c$

Parabola con asse // asse $y \equiv_{Def}$ $x=Ay^2+By+C$

Osservazione: la parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto FUOCO e da una retta fissa detta DIRETTRICE che in questo caso è una retta // all'asse x

ovvero $F\equiv(p,q)$ e $r: y=k\neq p$

$$d((x,y);(p,q))=d((x,y),r) \quad \text{ovvero}$$

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=\frac{|y-k|}{|1|}$$

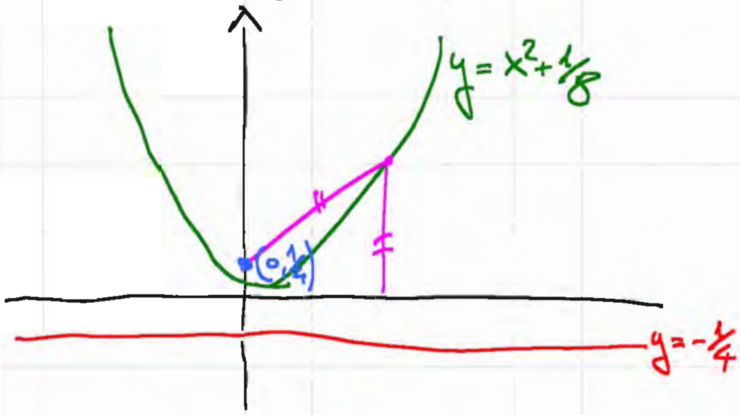
$$x^2+p^2-2px+\cancel{y^2}+q^2-2qy=\cancel{y^2}+k^2-2ky$$

$$x^2+p^2-2px+q^2-k^2 = y(2q-2k)$$

$x^2+p^2-2px+\frac{1}{8}$

ad esempio se $q=\frac{1}{4}$ e $k=-\frac{1}{4}$ e $p=0$

si trova $y=x^2+\frac{1}{8}$



asse della parabola $\equiv_{Def}$ data la parabola

$y=ax^2+bx+c$, diciamo asse la retta, parallela all'asse y, che gioca il ruolo di asse di simmetria per il grafico della parabola

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \iff y=a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}\right]$$

$$\iff y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$$

e in questo caso l'asse ha equazione

$$x=-\frac{b}{2a}$$

Vertice della parabola $\equiv_{Def}$ è l'intersezione tra la parabola e il suo asse, ovvero

$$\begin{cases} y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4} \\ x=-\frac{b}{2a}\end{cases} \qquad V\equiv\left(-\frac{b}{2a};\ c-\frac{b^2}{4}\right)$$

Oss: è l'ascissa del punto di $\begin{cases}\text{minimo assoluto, se } a>0 \\ \text{massimo assoluto, se } a<0\end{cases}$

Esercizio Data la parabola $y = x^2 - 2x + 4$ determinarne l'asse e il vertice 11

dim

$$y = (x^2 - 2x + 1) + 3 \iff y = (x-1)^2 + 3$$

asse : $x = 1$

vertice : $\begin{cases} x = 1 \\ y = (x-1)^2 + 3 \end{cases}$ $V \equiv (1, 3)$ ▥

Oss: Intersecando una retta con una conica, si ha un sistema di 2° grado e dunque ci si aspetta, in generale, una coppia di soluzioni

retta tangente ad una conica $\equiv_{def}$ retta che interseca una conica in uno, ed uno solo, punto.

Oss: la retta tangente, nel punto di contatto, ha un punto di contatto del secondo ordine

Esercizio Calcolare la tangente in $(\bar{x}, \bar{y}) \in P$ alla parabola P: $y = x^2 + bx + c$

Se volete potete fare questo esercizio anche nel caso piu' generale y=ax^2+bx+c

dim la tangente è quella retta che ha 1! intersezione con P in $(\bar{x}, \bar{y})$

$\begin{cases} y = x^2 + bx + c \\ y = \bar{y} + m(x - \bar{x}) \end{cases}$ interseco la parabola con una delle rette del fascio in $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{y} + mx - m\bar{x} = x^2 + bx + c \iff x^2 + x(b-m) + c + m\bar{x} - \bar{y} = 0$$

ma $\bar{y} = \bar{x}^2 + b\bar{x} + c$, quindi

$$x^2 + x(b-m) + \cancel{c} - (\bar{x}^2 + b\bar{x} + \cancel{c}) + m\bar{x} = 0$$

$$(x^2 - \bar{x}^2) + x(b-m) - \bar{x}(b-m) = 0$$

$$(x - \bar{x})[x + \bar{x} + b - m] = 0$$

se si vuole che $x = \bar{x}$ sia soluzione doppia, è necessario che

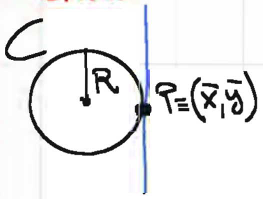
$$2\bar{x} + b - m = 0 \iff m = b + 2\bar{x}$$

ovvero l'eq. della retta tg alla parabola in $(\bar{x}, \bar{y})$ ha equazione

$$y = \bar{y} + (b + 2\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$ ▥

Esercizio: Calcolare la retta tangente ad una circonferenza $C: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ in un suo punto $(\bar{x},\bar{y})$

dim



La retta del fascio centrato in $(\bar{x},\bar{y})$

$y-\bar{y}=m(x-\bar{x})$. La interseco con la circonferenza e impongo di avere una sola intersezione

$$\begin{cases} y=\bar{y}+m(x-\bar{x}) \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow (x-x_0)^2+\left(\bar{y}+m(x-\bar{x})-y_0\right)^2=R^2$$

$$(x-x_0)^2+\left[m\left((x-x_0)-(\bar{x}-x_0)\right)+(\bar{y}-y_0)\right]^2=R^2$$

poniamo $\omega=x-x_0$ $\quad\bar{\omega}=\bar{x}-x_0$ $\quad\bar{z}=\bar{y}-y_0$

$$\omega^2+\left[m(\omega-\bar{\omega})+\bar{z}\right]^2-R^2=0$$

$$\omega^2+\left[m^2(\omega^2+\bar{\omega}^2-2\omega\bar{\omega})+\bar{z}^2+2m\omega\bar{z}-2m\bar{\omega}\bar{z}\right]-R^2=0$$

$$\omega^2+m^2\omega^2+m^2\bar{\omega}^2-2m^2\omega\bar{\omega}+2m\omega\bar{z}-2m\bar{\omega}\bar{z}-\bar{\omega}^2=0$$

$$\omega^2(1+m^2)+2m\omega(\bar{z}-m\bar{\omega})+m^2\bar{\omega}^2-2m\bar{\omega}\bar{z}-\bar{\omega}^2=0$$

$$\Delta=m^2(\bar{z}^2+\cancel{m^2\bar{\omega}^2}-\cancel{2m\bar{\omega}\bar{z}})-\cancel{m^2\bar{\omega}^2}+2m\bar{\omega}\bar{z}+\bar{\omega}^2-\cancel{m^4\bar{\omega}^2}+\cancel{2m^3\bar{\omega}\bar{z}}+\cancel{m^2\bar{\omega}^2}=0$$

$$=m^2\bar{z}^2+2m\bar{\omega}\bar{z}+\bar{\omega}^2$$

$$=(m\bar{z}+\bar{\omega})^2=0 \quad \text{se} \quad m=-\frac{\bar{\omega}}{\bar{z}}=-\frac{\bar{x}-x_0}{\bar{y}-y_0}$$

In corrispondenza a questo valore per m

Trovo la retta tangente $\quad y=\bar{y}-\dfrac{\bar{x}-x_0}{\bar{y}-y_0}(x-\bar{x})$

poiché questa retta ha con la circonferenza una sola intersezione con molteplicità due

Secondo Metodo: la retta che passa per $(\bar{x},\bar{y})$ (x_0,y_0) ha equazione $\dfrac{y-\bar{y}}{y_0-\bar{y}}=\dfrac{x-\bar{x}}{x_0-\bar{x}}$ ovvero $y=\bar{y}+\dfrac{y_0-\bar{y}}{x_0-\bar{x}}(x-\bar{x})$

Questa retta è un diametro, e la retta che passa per $(\bar{x},\bar{y})$ ed è $\perp$ al diametro ha equazione

$$y=\bar{y}-\frac{x_0-\bar{x}}{y_0-\bar{y}}(x-\bar{x})$$

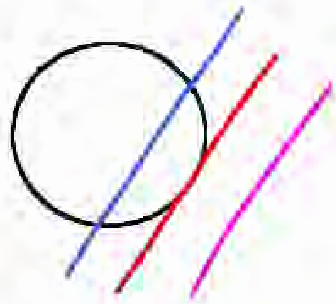
Questa retta - si verifica - ha nel punto $(\bar{x},\bar{y})$ due intersezioni coincidenti con C ∎

Gli esercizi dal 2.30 al 2.43 sono tutti affrontabili dagli studenti, mentre il 2.44 conviene sia affrontato dal docente

Esercizio 2.44 : trovate i valori di k per cui la retta di equazione $x - y + k = 0$ risulta esterna alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$, quelli per cui è secante, e quelli per cui è tangente; in quest'ultimo caso, determinate le coordinate del punto di tangenza.

dim. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ x=y-k \end{cases}$$



le tre situazioni sono quelle di figura, ovvero 2, 1 o ϕ intersezioni

$$(y-k)^2+y^2-2y+2k=0 \iff y^2+k^2-\cancel{2k}+y^2-2y+\cancel{2k}=0$$

$$\iff 2y^2-2y+k^2=0 \quad \text{e ha} \quad y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-2k^2}}{2}$$

e dunque

$$1-2k^2>0 \iff -\frac{1}{\sqrt{2}}<k<\frac{1}{\sqrt{2}} \iff 2 \text{ soluzioni (secante)}$$

$$1-2k^2=0 \iff k=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff 1 \text{ soluzione (tangente)}$$

$$1-2k^2<0 \iff |k|>\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \phi \text{ soluzioni (esterna)} \blacksquare$$