8° INCONTRO

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

La funzione esponenziale

La funzione esponenziale con base $a \in \ ]0, +\infty[\setminus \{1\}$:

$$\mathbf{f(x) = a^x}$$

a^x è l'unica funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ t.c.

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$
2) $a^1 = a$

dove $a > 0$, $a \neq 1$

Osservazione: il nome «funzione esponenziale» viene riservato al caso $a = e = 2{,}718\ldots$, il numero di Eulero

Dalle proprietà 1) e 2) e dalla continuità seguono le altre
($a > 0$, $a \neq 1$)

3) $a^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

4) $(a^x)^y = a^{xy} \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$

5) a^x è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$

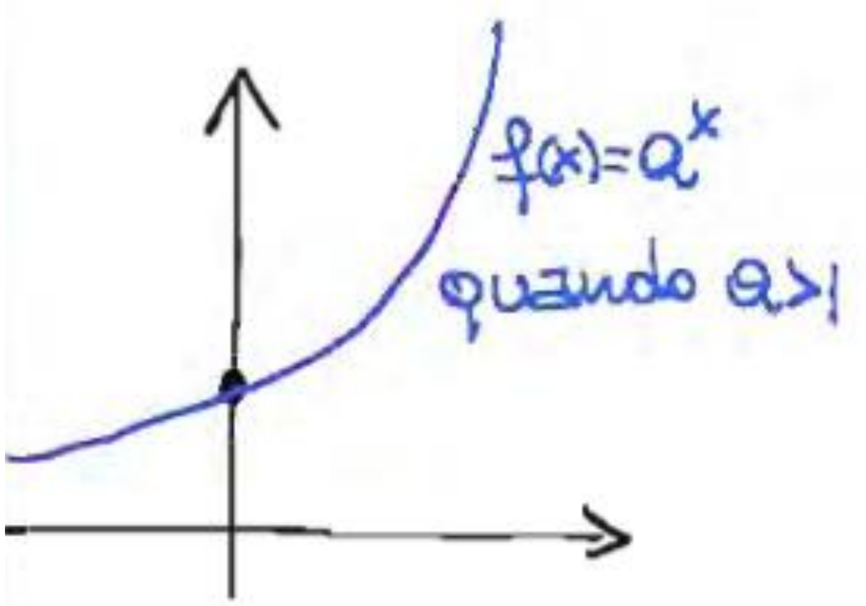
6) $a^0 = 1 \quad \forall\, a > 0$

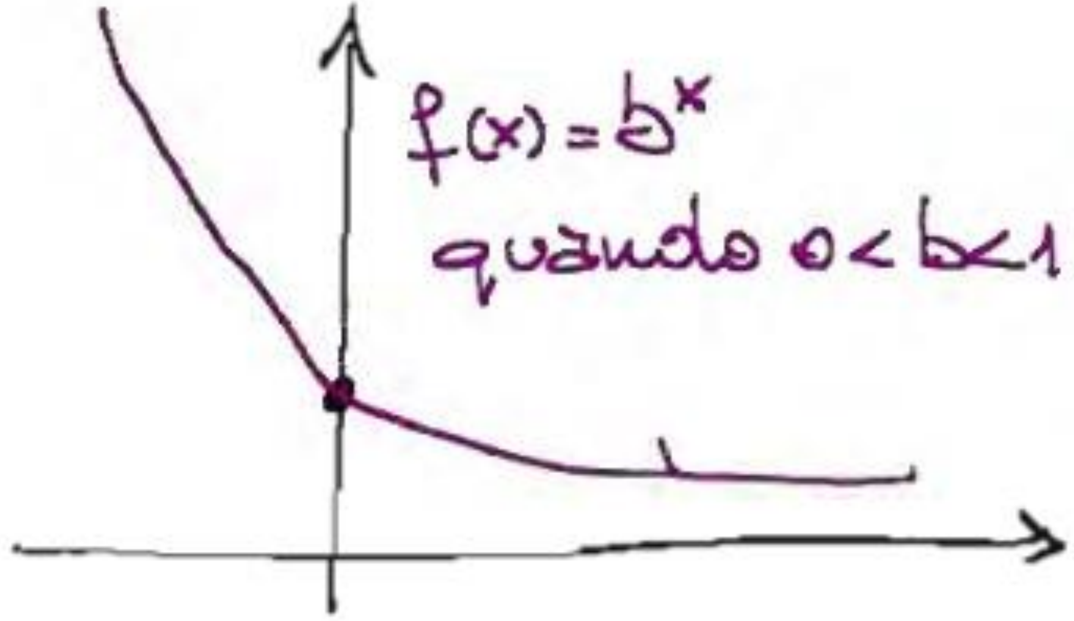
Oss: da 4) a 6) segue $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, e dunque noti i valori di a^x per $x>0$ deduco quelli per $x<0$

Oss: quindi a^x ⬆ se $a > 1$.

Preso $b \in (0,1)$, si ha che $\frac{1}{b} > 1$ → $\frac{1}{b^x}$ ⬆ → b^x ⬇

I grafici sono perciò:





N.B.: per il momento non è del tutto chiara la relazione tra a^x e b^x, ovvero tra esponenziali con basi $\neq$

Logaritmo in base a

Il logaritmo in base a:

$$\mathbf{f(x) = log_a x}$$

Si dimostra che $f(x)=a^x$ per $a>1$

- continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$
- strettamente crescente in $\mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = \ ]0, +\infty[$

Dunque esiste la funzione inversa f^{-1} : $]0, +\infty[$ ---> $\mathbb{R}$

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\log_a(a^x) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall\, y > 0$$

$$a^{\log_a y} = y$$

Logaritmo in base $a>0$, $a\neq 1$

Il logaritmo in base $a>0$, $a\neq 1$:

$$\mathbf{f(x) = \log_a(x)}$$

Essendo $\log_a(x)$ la funzione inversa di a^x

1') $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \forall\, x,y \in\ ]0, +\infty[$

2') $\log_a(a)=1$

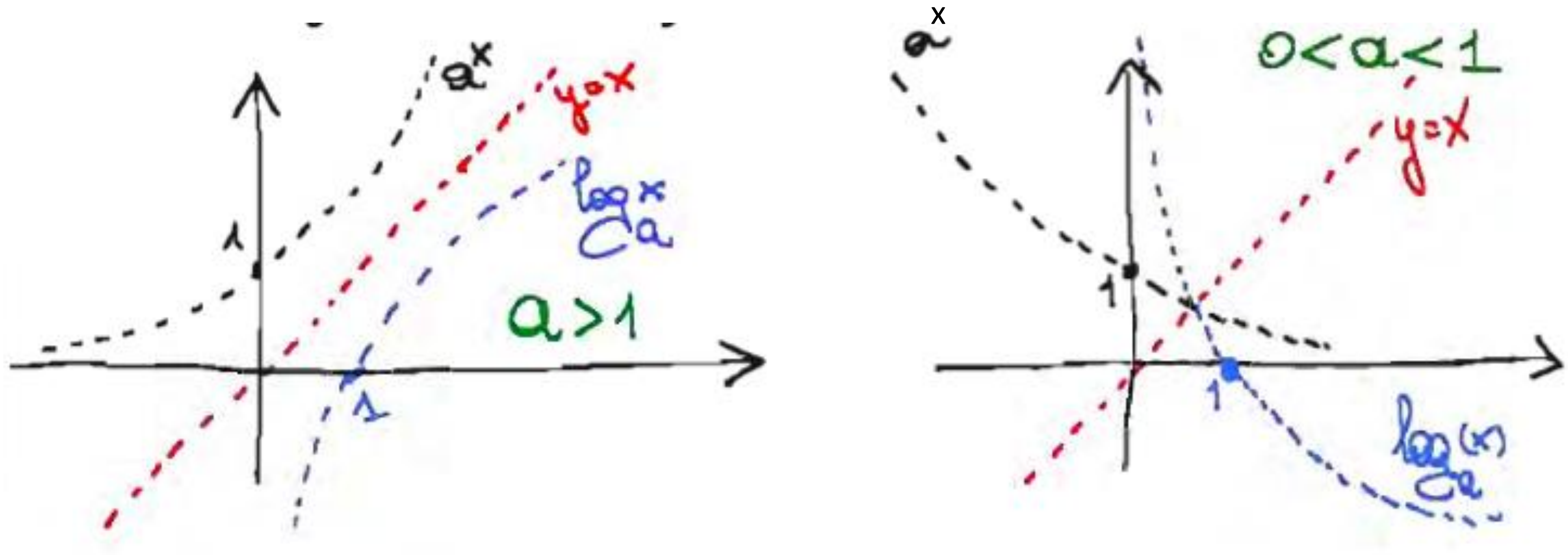
$\log_a(x)$ è l'unica funzione continua su $]0, +\infty[$ che soddisfa 1') e 2')

4’) $\log_a(x^y) = y \log_a x \qquad \forall\, x > 0 \qquad \forall\, y > 0$

5’) $\log_a x$ strettamente crescente $\forall\, a > 1$

6’) $\log_a(1) = 0 \qquad \forall\, a > 0 \quad a \neq 1$

3’) $\log_a x \begin{cases} > 0 & \forall\, x > 1 \\ < 0 & \forall\, x \in (0,1) \end{cases}$



Osservazione: le funzioni a^x e $\log_a x$ permettono di dare un significato all'espressione:

$$x^y \,,\; x > 0$$

Infatti

$\ln(e^x) = \quad e^{\ln x} = \quad x \quad \forall\, x > 0 \quad \rightarrow \quad x^y = e^{\ln(x^y)} \quad \rightarrow$

$$\mathbf{x^y = e^{y\ln x}} \qquad \forall\, \mathbf{x > 0} \quad \forall\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$$

Più in generale, essendo $x = a^{\log_a x}$ $\forall x>0$ $\forall a>0$, $a \neq 1$
si ha

$x^y = a^{\log_a(x^y)} = a^{y\log_a(x)}$ $\forall\, x > 0$ $\forall\, y \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$

$$\mathbf{x^y = a^{y\log_a(x)}\ \forall\, x > 0 \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}}$$

$$\mathbf{quando\ a > 0,\ a \neq 1}$$

Formula del cambio di base

Siano a,b > 0 , $a \neq 1$ $b \neq 1$ le due basi

$\log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$ $\log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$ $\forall\, x > 0$

Dim: per definizione di funzione inversa $x = a^{\log_a(x)} = b^{\log_b(x)} > 0$

e dunque $\log_b(x) = \log_b(a^{\log_a(x)}) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$

$\rightarrow$ $\log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$

Analogamente:

$\log_a(x) = \log_a(b^{\log_b(x)})$

$= \log_b(x) \cdot \log_a(b)$

$\rightarrow \log_b(x) = \dfrac{log_a(x)}{log_a(b)}$

Cambio di base nell'esponenziale

Data $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, con $a,b>0$ $a,b\neq 1$, si ha

$$\mathbf{f(x) = a^x = (b^{\log_b a})^x = b^{x*\log_b a} = g^{(x*\log_b a)}}$$

Esercizio: provare che $\log_a(b)*\log_b a = 1$ $\forall\, a,b>0$ $a,b\neq 1$

Soluzione: nella formula del cambio di variabili, si prenda y=a e=b x=b

Osservazione: a^x tende a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ quando $a>1$, ed è «molto più veloce» di x^k $\forall k \in \mathbb{N}$, ovvero:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, a > 1$$

Analogamente, quando a>1, anche $\log_a(x)$ tende a + ∞ quando x--> + ∞, ed è «molto più lenta» di x^{α} $\forall\, \alpha > 0$, ovvero:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log_a x}{x^{\alpha}} = 0 \qquad \forall\, \alpha > 0 \quad \forall\, a > 1$$

Problema:

Cosa accade quando la base a=1?

In questo caso si ha $1^x=1 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$, dunque la funzione non è monotona e quindi 1^x non è invertibile.

Ne consegue che non ha senso considerare $\log_1 x$!

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

Per introdurre queste disuguaglianze è sufficiente osservare che:

$$x < y < z < w < \ldots \rightarrow e^x < e^y < e^z < e^w < \ldots$$

ovvero l'esponenziale PRESERVA L'ORDINE (quando la base è >1). Altrimenti, quando $0 < a < 1$

$$x < y < z < w < \ldots \rightarrow a^x > a^y > a^z > a^w > \ldots$$

Ovvero INVERTE L'ORDINE

Grazie a questa osservazione è semplice passare da una disuguaglianza del tipo

$$\mathbf{e^{f(x)} < e^{g(x)}}$$

ad una disuguaglianza del tipo

$$\mathbf{f(x) < g(x)}$$

Considerazioni perfettamente analoghe valgono per logx, che conserva l'ordine se a>1, mentre lo inverte quando $0 < a < 1$.