Disequazioni - parte 1ª

Premessa

Ricerca di massimo o minimo di un insieme finito di valori numerici

IRR. RAZ.

$$\max\left\{\frac{2\sqrt{5}-1}{3}; 1\right\}$$ (A)

$$\max\left\{\frac{5}{13}; \frac{3}{8}; \frac{7}{8}; \frac{5}{6}\right\}$$ (B)

$$\max\left\{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; \frac{1}{4}; \sqrt{\frac{1}{2}}; \frac{1}{3}\right\}$$ (C)

(A) Dato che i due numeri sono $\neq$, certamente uno è maggiore dell'altro anziché cercare "direttamente" il max, considero

$$\frac{2\sqrt{5}-1}{3}-1>0$$

Se questa disuguaglianza risulterà VERA, allora il numero irrazionale sarà > del razionale e avremo trovato il max.

Se invece risulterà FALSA il max sarà il n° razionale

$$\frac{2\sqrt{5}-1-3}{3}>0 \quad \frac{2\sqrt{5}-4}{3}>0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5}-4>0 \quad \text{VERO}$$

(B) $\max\left\{ \frac{5}{13}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{5}{6} \right\}$

numeri RAZIONALI

PRODOTTO IN CROCE

$\frac{5}{13} > \frac{3}{8}$ $\qquad 40 > 39$

allora

ORDINE TOTALE

$\frac{5}{13} < \frac{7}{8}$ $\qquad 40 < 91$

allora

$\frac{5}{13} < \frac{5}{6}$ $\qquad 30 < 65$

allora

$$\boxed{\frac{7}{8}} > \boxed{\frac{5}{6}} > \boxed{\frac{5}{13}} > \boxed{\frac{3}{8}}$$

per la PROPRIETÀ TRANSITIVA

se $a > b$ e $b > c$ allora

$$a > c$$

$$\frac{7}{8} \times \frac{5}{6} \qquad 42 > 40$$

$$>$$

c) Confronto i quattro numeri scritti come radicali

Stiamo nei radicali positivi (aritmetici) ... allora

$$\sqrt[3]{2^3} = 2 \qquad \sqrt[n]{a^n} = a$$

Trasformo tutti i numeri in $\sqrt[6]{}$

$$\left\{ \sqrt[6]{\frac{1}{16}} ; \sqrt[6]{\frac{1}{4096}} ; \sqrt[6]{\frac{1}{8}} ; \sqrt[6]{\frac{1}{729}} \right\}$$

Il max è il numero con l'argomento max: $\sqrt[6]{\frac{1}{8}}$

Andamento della funzione $f(x) = \sqrt[6]{x}$ strettamente crescente

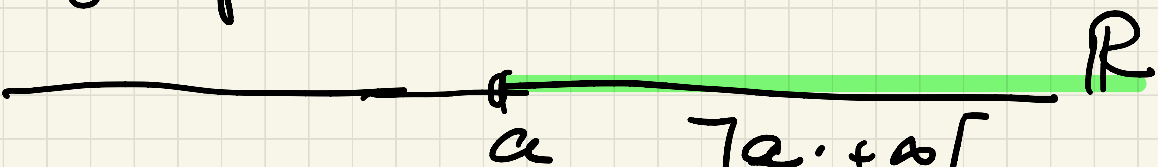
DISEQUAZIONI di I GRADO

$$x-a>0 \quad a\in\mathbb{R}$$

$(\geq, <, \leq)$

$$\{x\in\mathbb{R} : x-a>0\} = \{x\in\mathbb{R} : x>a\} =]a;+\infty[$$

Graficamente: $x>a$



$]a;+\infty[$

$x\geq a$

$[a;+\infty[$

$\frac{1}{3}x - 3 > x$ però non è nella forma $x - a \gtrless 0$

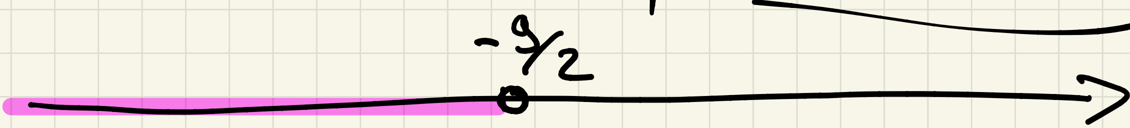
$x - \frac{1}{3}x + 3 < 0$

$\frac{2}{3}x + 3 < 0$

$\frac{2x + 9}{\cancel{3}} < \frac{0}{\cancel{3}}$

per il II princ.

dividi per 2: $\boxed{x + \frac{9}{2} < 0}$



$]-\infty; -\frac{9}{2}[$

$x < -\frac{9}{2}$

DISEQUAZIONI di II Grado

$$ax^2+bx+c>0 \quad (\geq, <, \leq)$$

Come semplificarci la vita...

1) si può sempre supporre che $a>0$

2) dato che, qualora $a=0$, la diseq. sarebbe di I grado possiamo dividere per a

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$$

allora calcolo anche il m.c.m. (è a) e lo elimino: $x^2+bx+c>0$

$$\boxed{x^2+bx+c>0}$$

3 casi:

- Due radici reali e distinte x_1, x_2

$x_1 < x_2$

$$\{x : x^2+bx+c>0\} = \{x : (x-x_1)(x-x_2)>0\}$$

prodotto di due fattori di I grado che devono essere CONCORDI

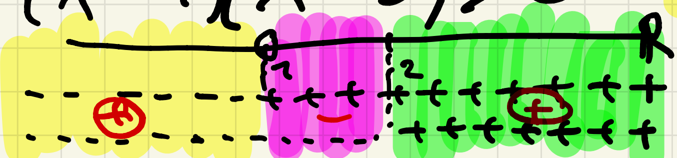
$$\{x : x-x_1>0 \text{ e } x-x_2>0\} \cup \{x : x-x_1<0 \text{ e } x-x_2<0\}$$

$x^2-3x+2>0$

due radici reali e distinte

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2$

$(x-1)(x-2)>0$



cercheremo...

$x-1>0$ e $x-2>0$

o

$x-1<0$ e $x-2<0$

Soluz. $]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$
" $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

• Due radici reali coincidenti

$$x_1 = x_2 = \bar{x}$$

$$x^2 + bx + c = (x - \bar{x})^2$$

$$(x - \bar{x})^2 > 0$$

tutti i quadrati sono NON NEGATIVI

Per $x \neq \bar{x}$

Insieme soluz. è $\mathbb{R} - \{\bar{x}\}$

$$x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 > 0 \quad \forall x \neq 1$$

$(x-1)^2 < 0$ $\qquad$ $(x-1)^2 \leq 0$

$\emptyset$ $\qquad$ $x = 1$ $\quad \{x \in \mathbb{R} : x = 1\}$

- Radici non reali (e quindi complesse)

$$x^2 + bx + c > 0$$

Completamento del quadrato

un quadrato ... di chi? ... di x

un doppio prodotto ... di chi? ... di x e di $\frac{b}{2}$

(se faccio $\cancel{2} \cdot x \cdot \frac{b}{\cancel{2}}$)

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c > 0$$

abbiamo aggiunto $\frac{b^2}{4}$, quindi dobbiamo toglierlo

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\underbrace{\left[c-\frac{b^2}{4}\right]}>0 \quad (\alpha)$$

siamo nel caso in cui

$\Delta = b^2-4c<0$

questo significa che la nostra espressione $c-\frac{b^2}{4}$ che segno ha?...

$\frac{4c-b^2}{4}$ cioè questa espressione è >0

Questo implica che (α) sia una SOMMA di quadrati

$\forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 2x + 5 > 0$ $\quad f(x) > 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

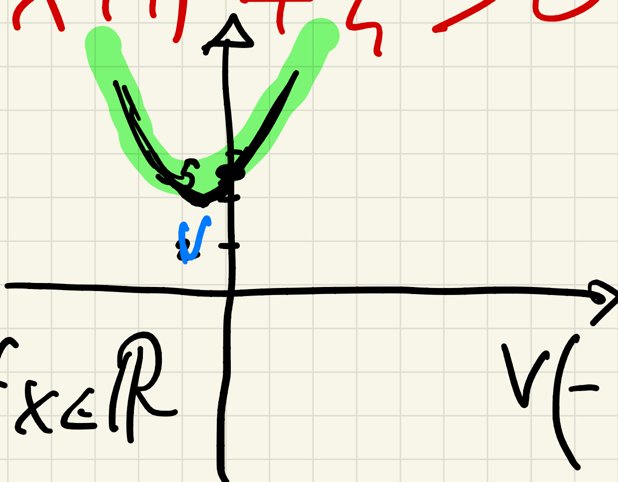
quadrato di x

doppio prodotto di x e di 1

$(x+1)^2 \underbrace{-1+5}> 0$

ovvero $x^2 + 2x + 1$

$(x+1)^2 + 4 > 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$



Parabola

$y = x^2 + 2x + 5$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (-1; 4)$

SISTEMI, PRODOTTI, QUOZIENTI

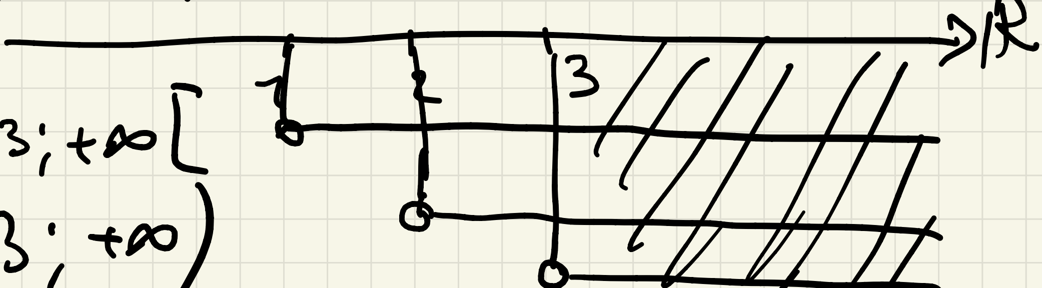
sistema

$$\left\{x : \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}\right\} = \left\{x : \underbrace{f(x)>0 \text{ E } g(x)>0}\right\}$$

insieme

$$= \{x : f(x)>0\} \cap \{x : g(x)>0\}$$

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \\ x-3>0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x>1 \\ x>2 \\ x>3 \end{array} \qquad x>3$$



$]3;+\infty[$

$(3;+\infty)$

Anche

$(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0$ ha

le stesse soluzioni del

sistema ?

Questo è un PRODOTTO, il

cui segno dipende dal

segno dei singoli fattori,

in base alla regola dei segni:

	F_1	F_2	F_3	
A	+	+	+	+
	+	+	−	−
	+	−	+	−
B	+	−	−	+
	−	+	+	−
C	−	+	−	+
D	−	−	+	+
	−	−	−	−

Soluz. per

$x \in [1;2] \cup [3;+\infty[$

$$\left\{x : \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\right\} =$$

$$\left\{x : f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) > 0\right\} \cup$$

$$\left\{x : f(x) \leq 0 \text{ e } g(x) < 0\right\}$$

INVECE $\quad g(x) \gtreqless 0$

$$\{x : f(x) > g(x)\} =$$

$$\left\{x : \frac{f(x)}{g(x)} > 1 \text{ e } g(x) > 0\right\} \cup$$

$$\left\{x : \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \text{ e } g(x) < 0\right\} \cup$$

$$\{x : f(x) > 0 \text{ e } g(x) = 0\}$$

Es. $\frac{x-3}{2-3x} \geq 1$ eq.

$$\frac{x-3-2+3x}{2-3x} \geq 0$$

$$\frac{4x-5}{2-3x} \geq 0 \quad \text{eq.}$$

$$\left(\{x : 4x-5 \geq 0\} \cap \{x : 2-3x > 0\}\right) \cup$$

$$\left(\{x : 4x-5 \leq 0\} \cap \{x : 2-3x < 0\}\right)$$

$$\emptyset \cup \left]\frac{2}{3} ; \frac{5}{4}\right] = \left]\frac{2}{3} ; \frac{5}{4}\right]$$

① $\left\{x : \frac{x-1}{2-x} > 0\right\}$ eq. $\left\{x : (x-1)(2-x) > 0\right\}$

???

$= \left\{x : (x-1) > 0 \text{ e } (2-x) > 0\right\} \cup$

$\left\{x : (x-1) < 0 \text{ e } (2-x) < 0\right\}$

$\left\{x : (x-1) > 0 \text{ e } (2-x) > 0\right\} \cup$

$\left\{x : (x-1) < 0 \text{ e } (2-x) < 0\right\}$

$$\left\{x : \frac{x-1}{2-x} \geq 0\right\} \supseteq \left\{x : (x-1)(2-x) > 0\right\}$$

$\supseteq$ inclusione "larga"

$\not\supseteq$ negazione

è vera

c'è $x=1$ che manca nel II insieme

$x^4 - 16 > 0$

Fattorizzazione

(scrittura del polinomio come prodotto di fattori di grado 1° o 2°)

$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) =$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)$

somma di quadrati > 0

$\{x : P(x) > 0\} = \{x : (x-2)(x+2) > 0\} \cap \{x : x^2 + 4 > 0\}$

$\mathbb{R}$

Solusione

$]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

Alternativa: la Parabola

(polinomio di II grado)

$1 \cdot x^2 - 4 > 0$

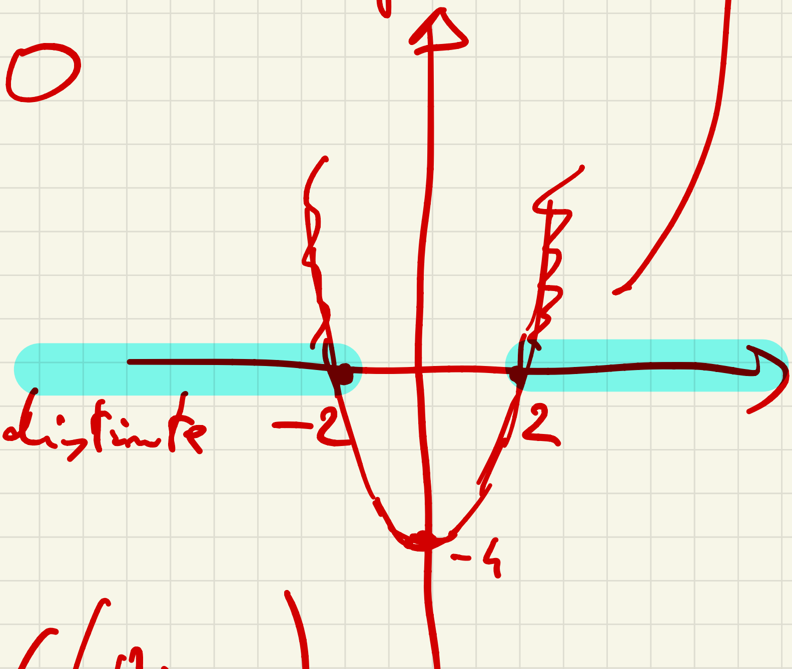
$\Delta = +16 > 0$

$\exists$ due radici reali distinte

$x_1 < x_2$

$x_1 = -2$

$x_2 = 2$



$V(0; \dots)$

per noi significa $\to y = x^2 - 4$

$f(x) > 0$

$$2x^3+3x^2-2x-3>0$$

grado > 2

Fattorizzazione

$$2x(x^2-1)+3(x^2-1)>0$$

$$(x^2-1)(2x+3)>0$$

$$(x-1)(x+1)(2x+3)>0$$

		$-3/2$		-1		1	
$x-1>0$: $x>1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1>0$: $x>-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x+3>0$: $x>-\frac{3}{2}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

$$\left]-\frac{3}{2};-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$$

$2x^3+3x^2-2x-3>0$

Usiamo la divisione di polinomi.

Dobbiamo cercare un (polinomio) divisore.

Cerca il possibile divisore tra i divisori interi del termine noto.

Per noi: -3

Possibili divisori:

$\pm 1 \; ; \; \pm 3$

$P(1) = 2 + 3 - 2 - 3 = 0$

$P(-1) = -2 + 3 + 2 - 3 = 0$

$P(3) =$

$P(-3) =$

$P(1) = 0 \Rightarrow (x-1)$

è un divisore

(perché se sostituiscono 1 ad x nel binomio

$1 - 1 = 0$

Se questo valore è zero allora il binomio $(x - v)$

valore

è un divisore del polinomio

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +3x^2 & -2x & -3 & x-1 \\
\hline
-\;2x^3 & -2x^2 & 0 & 0 & 2x^2+5x+3 \\
\hline
/ & 5x^2 & -2x & -3 & \\
 & -\;5x^2 & -5x & 0 & \\
\hline
 & / & +3x & -3 & \\
 & & -\;3x & -3 & \\
\hline
 & & / & 0 &
\end{array}
$$

quindi posso scrivere

$$2x^3+3x^2-2x-3=(x-1)\underbrace{(2x^2+5x+3)}_{}^{>0}$$

Fattorizzato

$$ax^4 - 3a^2x = P(x)$$

$$x - a = D(x)$$

Ruffini, comunque, ci dice qual è il resto della divisione $P(x) : D(x)$

— . . . .

$x - a$ si annulla per $x = a$

$$P(a) = a \cdot a^4 - 3a^2 \cdot a =$$

$$= \boxed{a^5 - 3a^3} \text{ resto}$$

per quali valori di a il resto è zero? $a^3(a^2 - 3)$

$a = 0$

$a = \pm\sqrt{3}$

$$ax^4 \quad 0 \quad 0 \quad -3a^2x \quad 0 \quad \Big| \; x-a$$

$$-\; ax^4 - a^2x^3 \qquad \Big| \; ax^3 + a^2x^2 + a^3x + (a^4 - 3a^2)$$

$$/ \quad a^2x^3 \quad 0 \quad -3a^2x \quad 0$$

$$-\; a^2x^3 - a^3x^2 \quad 0 \quad 0$$

$$/ \quad a^3x^2 \quad -3a^2x \quad 0$$

$$-\; a^3x^2 - a^4x \quad 0$$

$$/ \quad -3a^2x + a^4x + 0$$

$$x(a^4 - 3a^2)$$

$$-\; x(a^4-3a^2) - a(a^4-3a^2)$$

$$/ \quad a(a^4-3a^2) = a^3(a^2-3)$$

$$R = a^3(a^2-3)$$

$$Q(x) = ax^3 + a^2x^2 + a^3x + (a^4-3a^2)$$

$$x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0$$

$$\Delta = 9a^2 - 8a^2 = a^2 \underset{<}{\overset{?}{\gtreqless}} 0$$

$$a^2 \geq 0$$

ci sono due valori x_1, x_2 distinti o coincidenti;

$$x = \frac{3a \pm a}{2} = \begin{cases} a \leftarrow \\ 2a \leftarrow \end{cases}$$

$$\{x : x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0\} =$$

$$= \{x : (x-2a)(x-a) \leq 0\} =$$

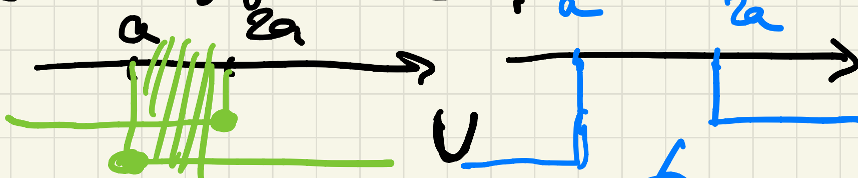
$$= \{x : x \leq 2a \text{ e } x \geq a\} \cup \{x : x \geq 2a \text{ e } x \leq a\}$$

$= \left( ]-\infty; 2a] \cap [a; +\infty[\right) \cup$

$\cup \left([2a; +\infty[\cap]-\infty; a] \right)$

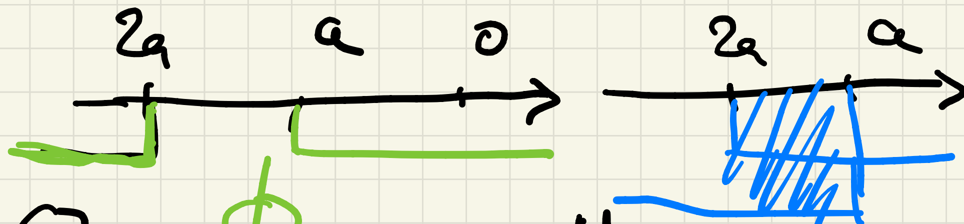
a è un parametro reale,

a può essere:



$a > 0$ $\quad [a; 2a] \quad [a; 2a] \cup \emptyset$

$a = 0 \qquad x^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0$



$a < 0 \quad \emptyset \cup [2a; a]$

$[2a; a]$

$$\begin{cases} 1 < x^2 \leq 4 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

Insieme delle soluzioni

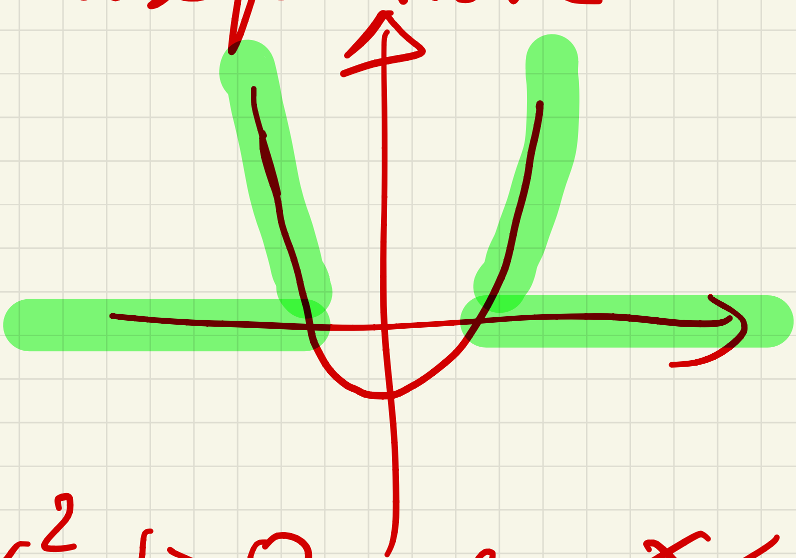
$$\left\{ x : \begin{cases} x^2 > 1 \\ (x-5)(x-1) \geq 0 \end{cases} \right\} \cap \left\{ x : \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ (x-5)(x-1) \geq 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \Big\{ \qquad \Big\}$$

alla fine

$$\begin{cases} x^2 > 1 \\ (x-5)(x-1) \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ (x-5)(x-1) \geq 0 \end{cases}$$

1ª disequazione



$y = x^2 - 1$

x_1, x_2

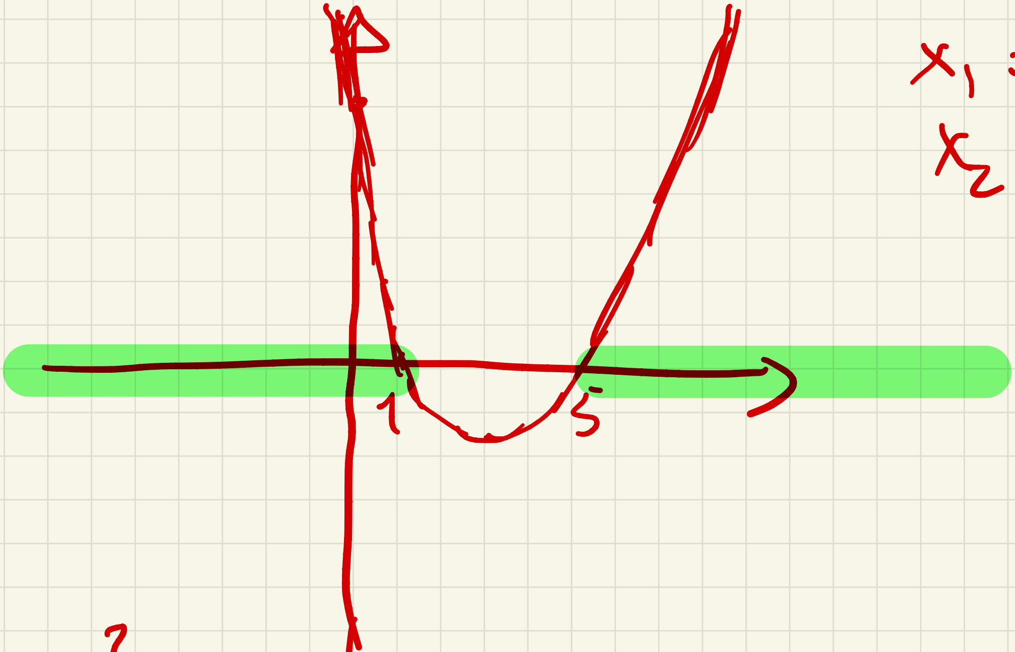
$x_1 = -1$

$x_2 = 1$

$x^2 - 1 > 0$ per $x < -1 \vee x > 1$

$]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

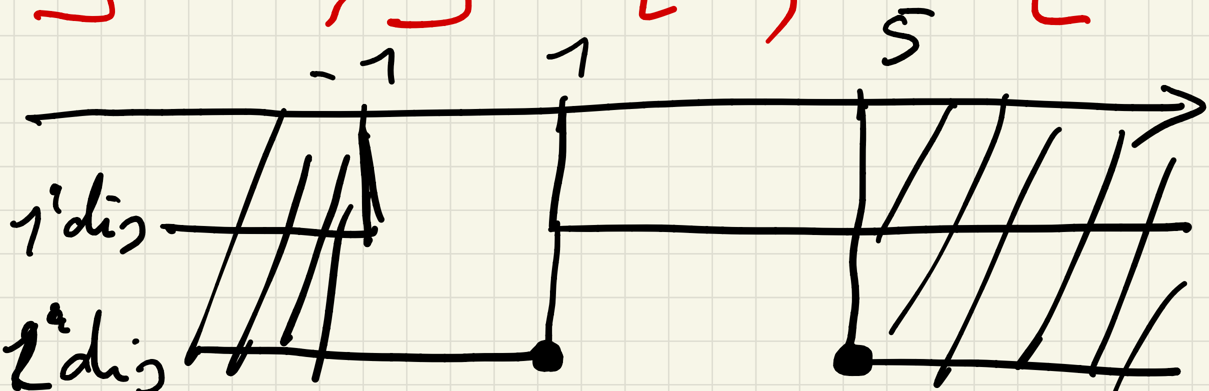
$x_1 = 1$
$x_2 = 5$



$x^2 - 5x + 6 \geq 0$ per

$x \leq 1 \vee x \geq 5$

$]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$



$]-\infty; -1[\cup [5; +\infty[$

$$\left\{x : \frac{x-1}{2-x} \geq 0\right\} \subseteq \left\{x : (x-1)(2-x) \geq 0\right\}$$

anche questa è vera

abbiamo l'elemento

$x = 2$