1° INCONTRO

LOGICA E INSIEMI

Proposizioni

<u>Proposizione</u>: una frase, di senso compiuto, che possa dirsi VERA o FALSA

<u>Oss</u>: in una proposizione compare il predicato, ma non è detto che la presenza del predicato in una frase sia sufficiente perché possa dirsi una proposizione

Predicati

<u>Predicato</u>: una frase in cui compaiono uno o più parametri, che diventa proposizione quando viene specificato il valore dei parametri.

Esempio:

$\boldsymbol{x{=}y} \equiv \boldsymbol{P(x,y)}$ è un predicato (predicato di uguaglianza)

$$P(3 \cdot 2{,}6)$$
$$P(5{,}6)$$

Quantificatori

$\exists \qquad\qquad \forall$

<u>**Oss**</u>: attenzione alla negazione

Operatori logici

Equivalenza: date due proposizioni A e B, le diciamo (logicamente) equivalenti se assumono lo stesso **valore di verità**

$\equiv$

TABELLA DI VERITA'

A	B
VERO	VERO
VERO	FALSO
FALSO	VERO
FALSO	FALSO

Operatore «non»

Negazione, a volte indicata con ¬

Tabella verità:

A	**¬A**
VERO	FALSO
FALSO	VERO

<u>Oss</u>: operatore unario

Oss: doppia negazione

Operatore «e»

Congiunzione logica, a volte indicata con ∧

Tabella verità:

A	B	A ∧ B
VERO	VERO	VERO
VERO	FALSO	FALSO
FALSO	VERO	FALSO
FALSO	FALSO	FALSO

<u>Oss</u>: operatore binario

Operatore «o»

Disgiunzione logica, a volte indicata con V

Tabella verità:

A	B	A ∨ B
VERO	VERO	VERO
VERO	FALSO	VERO
FALSO	VERO	VERO
FALSO	FALSO	FALSO

Oss: operatore binario

Oss: attenzione, significato leggermente differente rispetto al senso comune

2 utili teoremi

$$A \wedge B \equiv \neg[(\neg A) \vee (\neg B)]$$

Dim usando le tabelle di verità:

A	B	$A \wedge B$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$\neg[(\neg A) \vee (\neg B)]$
F	F	F	**V**
F	V	V	**F**
V	F	V	**F**
V	V	V	**F**

$$A \vee B \equiv \neg[(\neg A) \wedge (\neg B)]$$

Oss: posso usare solo due operatori logici

Tabella di verità dell'implicazione

Implicazione logica, a volte indicata con $\Rightarrow$

Tabella verità:

A	B	$A \Rightarrow B$
VERO	VERO	VERO
VERO	FALSO	FALSO
FALSO	VERO	VERO
FALSO	FALSO	VERO

Oss: quando antecedente è falso, sempre vera

Teorema: trasformazione di ⇒

$$A \Rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$$

Dim usando le tabelle di verità:

A	B	A ⇒ B
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

¬A	¬A V B
F	**V**
F	**F**
V	**V**
V	**V**

Tabella di verità doppia implicazione

Doppia implicazione (o equivalenza logica), a volte indicata con ⇔

Tabella verità:

A	B	A⇔B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Modus Ponens

Se piove, la strada si bagna. Sta piovendo. La strada è bagnata.

$$[(A \Rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow B$$

Dim usando le tabelle di verità:

A	B	A⇒B	(A⇒B) ∧ A	[(A ⇒ B) ∧ A] ⇒ B
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Modus tollens e contronominale

Se piove, la strada si bagna. La strada non è bagnata. Non piove.

$$[(A \Rightarrow B) \wedge \neg B] \Rightarrow \neg A$$

Contronominale:

Dire che se piove, la strada si bagna equivale a dire che se la strada non si bagna allora non sta piovendo.

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$$

Esercizio 1

Provare che $A \Leftrightarrow B$ equivale a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Risoluzione esercizio 1

$\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ equivale a $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A})$

A	B	A⇔B	A⇒B	B ⇒ A	(A ⇒ B) ∧ (B ⇒ A)
V	V	**V**	V	V	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**
F	V	**F**	V	F	**F**
F	F	**V**	V	V	**V**

Esercizio 2

Dimostrare che $\mathbf{[(\neg A) \lor B] \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)}$

Esercizio 3

Dimostrare che $\mathbf{\neg(A \land B) \Leftrightarrow (\neg A) \lor (\neg B)}$

Esercizio 4

Dimostrare che $\mathbf{\neg(A \lor B) \Leftrightarrow (\neg A) \land (\neg B)}$ senza far uso delle tabelle di verità

Risoluzione esercizio 2

Dimostrare che **[(¬A) ∨ B] ⇔ (A ⇒ B)**

A	B	¬A	[(¬A) ∨ B]	A⇒B
V	V	F	**V**	**V**
V	F	F	**F**	**F**
F	V	V	**V**	**V**
F	F	V	**V**	**V**

Risoluzione esercizio 3

Dimostrare che **¬(A ∧ B) ⇔ (¬A) ∨ (¬B)**

A	B	(A ∧ B)	¬(A ∧ B)	¬A	¬B	(¬A) ∨ (¬B)
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	F	**V**	F	V	**V**
F	V	F	**V**	V	F	**V**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

Risoluzione esercizio 4

Dimostrare che $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathbf{A}) \wedge (\neg\mathbf{B})$ senza far uso delle tabelle di verità

$$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = \neg\{\neg[(\neg A) \wedge (\neg B)]\} = [(\neg A) \wedge (\neg B)]$$

La doppia negazione in logica diventa affermazione

Insiemi

Gli insiemi si possono rappresentare in due modi:

Per elencazione: $A = \{2,3,4,5\}$ $B = \{-2,2\}$

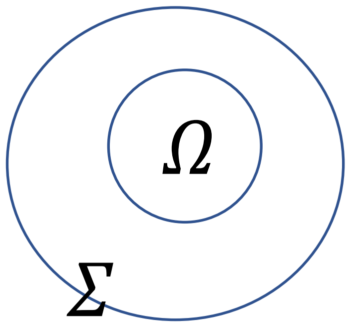
Per caratteristica: $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 6\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 = 4\}$

$\in$ ***appartenenza*** $2 \in A$ oppure $3 \notin B$

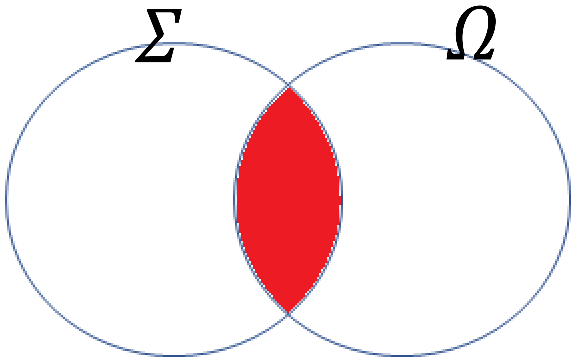
$\emptyset$ ***Insieme vuoto*** $\forall x, x \notin \emptyset$

Inclusione, Intersezione e Unione

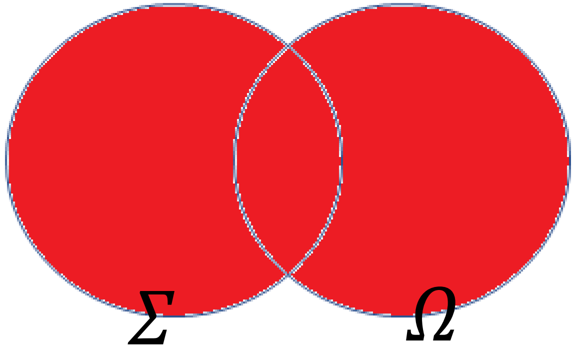
$\subseteq$ ***inclusione*** $\Omega \subseteq \Sigma \Leftrightarrow \forall x \epsilon \Omega , x \in \Sigma$



$\cap$ ***intersezione*** $\Omega \cap \Sigma = \{x : x\epsilon\Omega \ \wedge x\epsilon\Sigma\}$

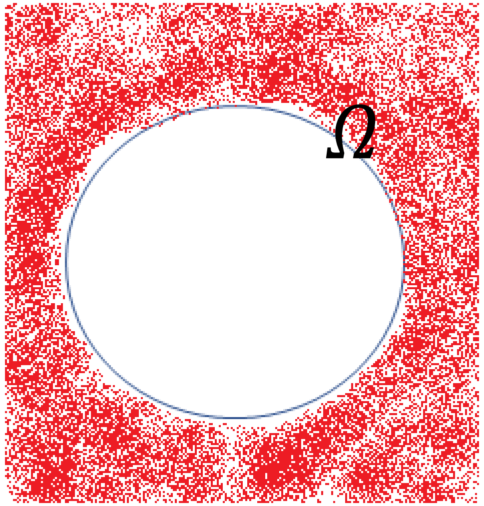


$\cup$ ***unione*** $\Omega \cup \Sigma = \{x : x\epsilon\Omega \ \vee x\epsilon\Sigma\}$

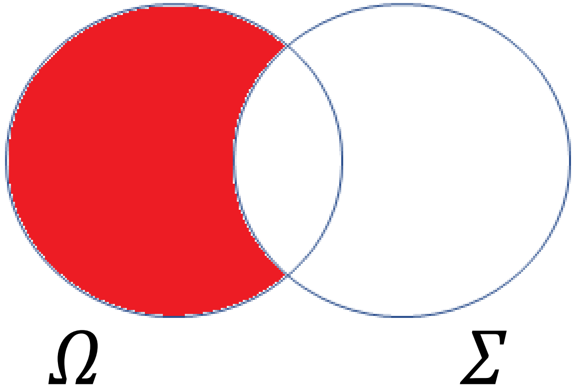


Complementare e differenza

$\boldsymbol{\Omega^c}$ ***complementare di*** $\boldsymbol{\Omega}$ $\qquad \Omega^c = \{x: x \notin \Omega\}$



$\setminus$ ***differenza*** $\Omega \setminus \Sigma = \{x: x \epsilon \Omega \ \wedge \ x \notin \Sigma\}$



Osservazioni

$$\Omega \setminus \Sigma = \Omega \setminus (\Omega \cap \Sigma) = \Omega \cap \Sigma^{\boldsymbol{c}}$$

$$(\Omega^c)^c = \Omega$$

$$\emptyset^c = U$$

Leggi di De Morgan

Dati gli insiemi Ω e Σ

$$(\boldsymbol{\Omega} \cap \ \boldsymbol{\Sigma})^{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{c}} \cup \boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{c}}$$

Dim:

$$(\boldsymbol{\Omega} \cap \ \boldsymbol{\Sigma})^{\boldsymbol{c}} = \{x: x \epsilon \Omega \ \wedge x \epsilon \Sigma\}^{c} = \{x: x \notin \Omega \ \vee x \notin \Sigma\} = \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{c}} \cup \boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{c}}$$

$$(\boldsymbol{\Omega} \cup \boldsymbol{\Sigma})^{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{c}} \cap \boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{c}}$$

Dimostrare l’uguaglianza tra insiemi

Si vuole dimostrare che $A \equiv B$

In tal caso è necessario procedere provando che:

1) $A \subseteq B$ ovvero che $\forall x \epsilon A, x \epsilon B$

2) $B \subseteq A$ ovvero che $\forall x \epsilon B, x \epsilon A$

Esempio

Si vuole provare che $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Pongo $\Sigma = (A \cap B) \cup C$

Pongo $\Omega = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

1) Dimostro che $\Sigma \subseteq \Omega$

2) Dimostro che $\Omega \subseteq \Sigma$

Risoluzione esempio

1) Dimostro che $\Sigma \subseteq \Omega$

Se $x \in (A \cap B)$ allora $(x \in A) \ \wedge (x \in B)$. Quindi $x \in (A \cup C) \vee x \in (B \cup C)$. Quindi $x \in \Omega$

2) Dimostro che $\Omega \subseteq \Sigma$

Caso a) Se $x \in C$ allora ne consegue direttamente che $x \in (A \cap B) \cup C = \Sigma$

Caso b) Se $x \in A$ ma $x \notin B, C$ allora ne consegue che non può appartenere a Ω (quindi caso non interessante)

Caso c) Se $x \in B$ ma $x \notin A, C$ allora ne consegue che non può appartenere a Ω (quindi caso non interessante)

Caso d) Se $x \in A \ \wedge x \in B$ allora $x \in (A \cap B)$ quindi ne consegue direttamente che $x \in (A \cap B) \cup C = \Sigma$

Insieme delle parti

$\mathcal{P}(\Omega)$ Definito come l'insieme dei sottoinsiemi di Ω

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{E : E \subseteq \Omega\}$$

<u>Oss</u>: l'insieme vuoto e lo stesso insieme fanno parte dell'insieme delle parti

<u>Oss</u>: quanti elementi ha l'insieme delle parti?

Prodotto cartesiano

$$\Omega \times \Sigma = \{(x, y): x \in \Omega \wedge y \in \Sigma\}$$

Insieme delle coppie <u>ordinate</u> (x,y)

<u>Oss</u>: quante coppie ordinate ci sono?

Risoluzione esercizio 1.20

Esercizio 1.20 : determinate gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1 \text{ o } x^2 \geq 5\}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 100 \text{ e } (2x - 1 \leq 0 \text{ o } x > 7)\}$.

Prima parte esercizio:

$$A = [-1,1]$$

$$B =]-\infty; \sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$$

Quindi:

$$C = A \cup B =]-\infty; \sqrt{5}] \cup [-1,1] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$$

Seconda parte esercizio:

$$F = A \cap (B \cup C)$$

$$A =]-10; 10[$$

$$B =]-\infty; \frac{1}{2}]$$

$$C = [+7; +\infty[$$

Quindi:

$$F = A \cap (B \cup C) =]-10; \frac{1}{2}] \cup]7; 10[$$

Risoluzione esercizio 1.21

Esercizio 1.21 : dite quali fra le seguenti uguaglianze sono vere:

a) $\{x \in \mathbb{R} : (x > 2 \text{ e } x < 6) \text{ o } x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \text{ e } (x < 6 \text{ o } x < 0)\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : (x < 1 \text{ o } x > 3) \text{ e } x \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ o } (x < 1 \text{ e } x \geq -3)\}$.

Risolvo parte a):

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$$

$A =]2, +\infty[$ $\quad B =]-\infty; 6[$ $\quad C =]-\infty; 0[$

$$(A \cap B) \cup C =]2; 6[\cup]-\infty; 0[$$

$$A \cap (B \cup C) =]2,6[$$

Quindi FALSA

Risolvo parte b):

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (]-\infty; +1[\cup]+3; +\infty[) \cap]-\infty; 2[=]-\infty; +1[$$

$$A \cup (B \cap C) =]-\infty; 0\, [\cup (]-\infty; +1[\cap]-3; +\infty[) =]-\infty; +1[$$

Quindi VERA

Risoluzione esercizio 1.23 b

$$E \setminus F = E \cap F^c$$

$$E \setminus \mathrm{F} = x \in E \;\wedge x \notin F = E \;\cap\; F^c$$

Risoluzione esercizio 1.23 c

$$[E \setminus F = \emptyset] \iff [E \subset F]$$

Dimostro che se $E \backslash F = \emptyset$ allora $E \subset F$

Se $E \backslash F = \emptyset$ allora $E \cap F^c = \emptyset$ (vedi risultato precedente). Quindi posso dire che $\forall x \in E$, $x \notin F^c$. Ma se $x \notin F^c$ vuol dire che $x \in F$. Quindi $\forall x \in E$, $x \in F$ che è la definizione di $E \subset F$.

Dimostro che se $E \subset F$ allora $E \backslash F = \emptyset$

Se $E \subset F$ allora $\forall x \in E$, $x \in F$. Quindi posso dire che $\forall x \in E$, $x \notin F^c$. Quindi $E \cap F^c = \emptyset$. Sapendo che $E \cap F^c = E \backslash F$, posso affermare che $E \backslash F = \emptyset$

Risoluzione esercizio 1.24

Determinare $\mathcal{P}(\{a, 1, \diamond\})$

$$\mathcal{P}(\{a, 1, \diamond\}) = \left\{\{a\}, \{1\}, \{\diamond\}, \{a, 1\}, \{a, \diamond\}, \{1, \diamond\}, \{a, 1, \diamond\}, \emptyset\right\}$$

Risoluzione esercizio 1.25

Determinare tutti gli elementi di $\{1, x\} \times \{a, 1, \diamond\}$

$$(1, a) \quad (1,1) \quad (1, \diamond) \quad (x, a) \quad (x, 1) \quad (x, \diamond)$$

Parallelismo tra operatori logici/insiemistici

Si consideri:

$$\Omega \equiv insieme\ universo \equiv \emptyset^c$$

$$\emptyset \equiv insieme\ vuoto \equiv \Omega^c$$

A	A^c
$\emptyset$	Ω
Ω	$\emptyset$

Complementare come negazione $\longrightarrow$

A	$\neg A$
F	V
V	F

A	B	$A \cap B$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	Ω	$\emptyset$
Ω	$\emptyset$	$\emptyset$
Ω	Ω	Ω

Intersezione come congiunzione logica $\longrightarrow$

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

A	B	$A \cup B$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	Ω	Ω
Ω	$\emptyset$	Ω
Ω	Ω	Ω

Unione come disgiunzione logica $\longrightarrow$

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

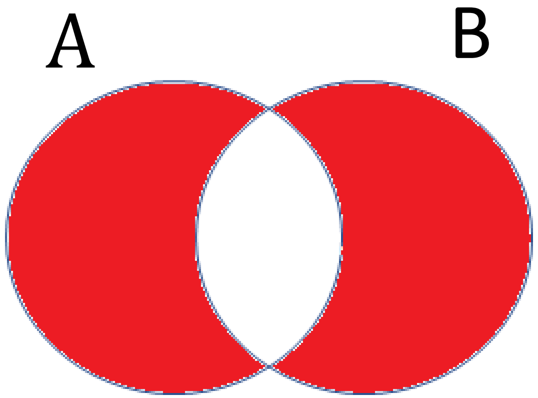
Ne consegue che vi è un certo rapporto tra operatori logici e insiemistici

Tabella di verità di «aut»

Operatore logico «aut», detto «o esclusivo»

A	B	A aut B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Differenza simmetrica in campo insiemistico $A \triangle B$



Parallelismo tra operatori logici/algebra

E’ possibile verificare il valore di verità di una proposizione per via algebrica. Si introduce l’operatore:

$$\overline{} : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

Così definito:

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

Si introduce l’operatore:

$$\cdot : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

Così definito:

$$0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$$

Si introduce l’operatore:

$$+ : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

Così definito:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$$

Pertanto, un predicato logico si trasforma in un’espressione algebrica:

$$V \longrightarrow 1$$

$$F \longrightarrow 0$$

$$\neg \longrightarrow \overline{}$$

$$\wedge \longrightarrow \cdot$$

$$\vee \longrightarrow +$$

Paradosso di Russell

Il paradosso di Russell recita:

«Esiste un barbiere che fa la barba a tutti coloro che non si fanno la barba da sé»

L’origine di questo paradosso nasce da una voluta confusione tra i simboli

$\in \qquad \subseteq$

Assiomi logici

1) Principio del terzo escluso

$$\forall A \qquad (A) \lor (\neg A) \text{ è } vera$$

2) Principio di non contraddizione

$$\forall A \qquad \neg[(A) \land (\neg A)] \text{ è } vera$$

3) Principio di transitività

$$\forall A, B, C \qquad [(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C) \text{ è } vera$$