



Proposizioni e Predicati

Quantificatore Esistenziale ed Universale

Operatori logici e loro tabelle di verità

(non, e, o, \Rightarrow , \Leftrightarrow)

Operatori Logici e circuiti elettrici

Modus Ponens e Tollens

Contronominale

Esercizi

Insiemi

Operatori insiemistici (complementazione, intersezione, unione)

leggi di de Morgan

Esercizi

Operatori logici e insiemistici pp 18

Operatori " " algebrici (*) pp 22

Il paradosso di Russell pp 24 (Appendice)

N.B. (*) è utile in classe perché permette

di verificare agevolmente quando

un predicato è vero o falso

P.S.: l'operatore logico "aut" (o questo o quello!)

e l'operatore insiemistico Δ nono inclusi

ndo per completezza, ma non servono

in seguito

P **Proposizione** \equiv Una frase di senso compiuto $\&$ che possa dirsi VERA o FALSA

Esempi Valori di verità

"Che ore sono?" NON È una proposizione

"Napoleone riuscì a Waterloo" è una proposizione
FALSA

" $3+2=5$ " è una proposizione VERA

Oss: in una proposizione compare il predicato materialmente, ma l'esistenza del predicato in una frase non basta per garantire che questa sia una proposizione infatti:

"Pioverà!" è una proposizione (può essere vera o falsa)

"Pioverà?" non è una proposizione

Dunque l'insieme delle proposizioni matematiche non è un sottoinsieme proprio delle proposizioni della lingua italiana

Predicato \equiv una frase in cui compiono uno o più parametri, che diventa una proposizione - vera o falsa - quando viene specificato il valore dei parametri

Esempio: " $x=y$ " \equiv $P(x,y)$ è un predicato (predicato di uguaglianza)

$P(3 \times 2, 6)$ è VERA: infatti $3 \times 2 = 6$

$P(5, 6)$ è FALSO: " $5 \neq 6$

\exists = "esiste almeno uno" = quantificatore esistenziale

\forall = "qualsiasi sia" = "per ogni" = quantificatore universale

Osservazione: la negazione di \exists è \forall (e viceversa)

"non è vero che $\forall a \in A, a \text{ è pari}$ "

3

equivalente a dire

" $\exists a \in A, a$ non è pari"

NEG. &

Tutti gli uomini sono buoni

Esiste

Operatori Logici \equiv_{def} "non", "e", "o"

almeno

Per dare un significato a questi operatori
nono memorare le tabelle di verità

un

uomo

Equivalenza (logica) \equiv_{def} Def Date due proposizioni
A e B, le
diciamo (logicamente)
equivalenti se
assumono lo stesso

non
buono

Valore di verità

Tabella di verità di "non"
(negazione, a volte indicata con " \neg ")

A	non A
V	F
F	V

Note: "non" è un operatore "unario"
"non ($\forall x \in A$)" equivale logicamente a " $\exists x \notin A$ "

più in generale "non \forall " \equiv " \exists "
"non \exists " \equiv " \forall " equivale logicamente

"non (non A)" equivale a "A"

in ppt,

A	non A	non (non A)
V	F	V
F	V	F



4

Esempio: la proposizione (vera!)
 "Non è vero che $\forall x \in A, x$ è maggiore di"
 diventa
 "non ($\forall x \in A, x > 1$)"
 diventa
 " $\exists x \in A$ tale che $x \leq 1$ "

Tabella di verità di "e" (congiunzione logica)
 3 volte indicata con "∧"

A	B	A e B
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Note: "e" è un operatore binario
 A e B è vera se e solo se simultaneamente
 vere A e B

Esempio: "Oggi piove e fa freddo" diventa
 "[oggi piove] e [oggi fa freddo]"

Tabella di verità di "o" (disgiunzione logica, 3 volte indicata con "∨")

A	B	A o B
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

"vel"
 "almeno"

→
 Note: "o" è un operatore binario
 "A o B" è falsa se A, B sono
 simultaneamente
 false

Esempio: "fai gli esercizi stasera o domani" 5
 equivalente a

"[fai gli esercizi stasera] o [(fai gli esercizi) domani]"

Nota: Si confronta la proposizione precedente con
 "fai gli esercizi stasera e domani"
 che equivale a

"[fai gli esercizi stasera] e [(fai gli esercizi) domani]"

S Teorema

① "A e B" \equiv "non [(non A) o (non B)]"
 equivalente logicamente

② "A o B" \equiv "non [(non A) e (non B)]"

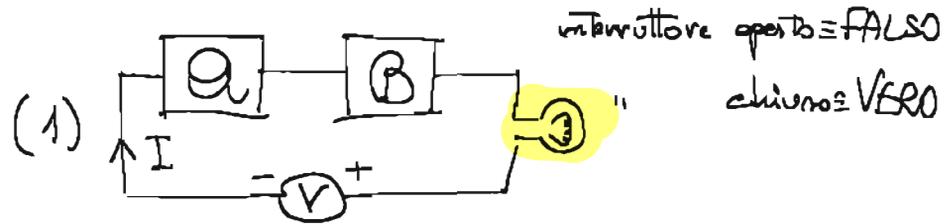
diciam					
A	B	A e B	non A o non B	non (non A o non B)	
F	F	F	V	F	
F	V	F	V	F	
V	F	F	V	F	
V	V	V	F	V	

Confrontando le colonne in blu si vede la Terza

La dimostrazione di ② è speculare (basta scambiare "e" con "o"!) **c.v.d.**

Nota Bene: il risultato precedente è FONDAMENTALE, in quanto permette di ridurre a due gli operatori logici fondamentali. Ovvero i circuiti logici si possono costruire con 2 soli dispositivi

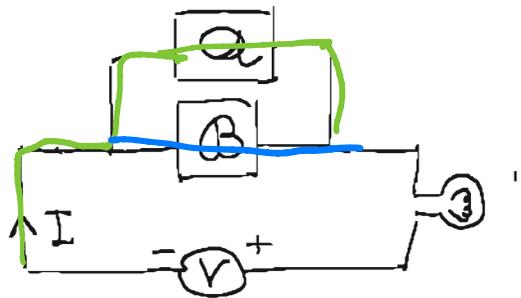
Nota: l'operatore "e" è rappresentato dal circuito (1) con due interruttori A, B, con la convenzione



"A e B" è vera quando la lampadina è accesa nel circuito (1) (e devono essere entrambi chiusi affinché si accenda la lampadina!)

Nota: l'operatore "o" è rappresentato dal circuito (2) con due interruttori A, B con la convenzione

interruttore aperto ≡ FALSO
chiuso ≡ VERO



"A o B" è vera quando la lampadina è accesa nel circuito (2) (ed è

sufficiente che uno solo dei due sia chiuso!)

Circuito
con
interruttori
in
parallelo

Tabella di verità di \Rightarrow

\equiv Def	A	B	$A \Rightarrow B$
	F	F	V
	F	V	V
	V	F	F
	V	V	V

Oss: "Se passi davanti alla Coop, allora compri il pane" (Prop 1)

Se poniamo $A \equiv$ passare davanti alla Coop
 $B \equiv$ comprare il pane

allora (Prop 1) diventa $A \Rightarrow B$

(Prop 1) risulta falsa solo in un caso
 antecedente vero \equiv sono passato davanti alla Coop
 $\equiv A$ è vera

conseguente falso \equiv non ho comprato il pane
 $\equiv B$ è falso

Nota: Quando l'antecedente è falso in $A \Rightarrow B$,
 l'implicazione è sempre vera e quindi non dà informazioni

Oss: "Se poni davanti alla Coop, (importante) allora compri il pane"

equivalenza

"non poni davanti alla Coop
o

compri il pane"

ovvero vale il seguente

S

Teorema: " $A \Rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$ "
equivalenza

Q	B	$A \Rightarrow B$	$(\neg A) \vee B$	$\neg A$	B
V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F

e confrontando si ha la tesi c.v.d.

Tabella di verità di " \Leftrightarrow " (equivalenza logica)

Q	B	$A \Leftrightarrow B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Esercizio (Modus Ponens) Provare che

" $[(A \Rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow B$ " è vera sempre

N.B.: Questo è il sillogismo aristotelico:

(Socrate è un uomo) e (uomo \Rightarrow mortale) \Rightarrow (Socrate mortale)

dim.

Q	B	$Q \Rightarrow B$	Q	$(Q \Rightarrow B) \wedge Q$	B	$((Q \Rightarrow B) \wedge Q) \Rightarrow B$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V

c.v.d.

S **Esercizio (Modus Tollens)** **Provare che**

" $[(Q \Rightarrow B) \wedge \text{non } B] \Rightarrow \text{non } Q$ " è vero sempre

S **Esercizio (Contronominale)**: **Provare che**

" $Q \Rightarrow B$ " \Leftrightarrow " $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } Q)$ "

$\neg B$	$\neg A$	$\dots \Rightarrow \dots$
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V

S **Esercizio** **provare che**
 " $Q \Leftrightarrow B$ " **equivale a** " $Q \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow Q$ "

c.v.d.

Esercizio: **Provare che**

"Qualsiasi siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$ " ①

dim. Posto $Q = "a \cdot b = 0"$, $B = "a = 0"$, $C = "b = 0"$

la ① equivale a " $\forall a, b \in \mathbb{R}, Q \Rightarrow (B \vee C)$ "

Sfruttando la contronominale

① \Leftrightarrow ② $\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ non } (B \vee C) \Rightarrow \text{non } Q$

\Leftrightarrow ③ $\forall a, b \in \mathbb{R} [(\text{non } B) \wedge (\text{non } C)] \Rightarrow (\text{non } Q)$

La ③ è certamente vera in quanto

se $(a \neq 0$ e $b \neq 0)$ allora $a \cdot b \neq 0$ c.v.d.

Q5

Esercizio: Scrivete in modo equivalente

"Non è vero che non voglio guardare e voglio comprare"

dim. Posto $A =$ "voglio guardare" $B =$ "voglio comprare"

la proposizione diventa

① "non ((non A) e B)" \Leftrightarrow "A o (non B)" ②

\Leftrightarrow "non A \Rightarrow non B" ③

② "voglio guardare o non voglio comprare"

③ "Se non voglio guardare allora non voglio comprare" VA

Q5

Esercizio: Scrivete in modo equivalente

"Non è vero che: mi piace l'aglio ^(e) ma non voglio mangiarlo"

dim. Posto $A =$ "mi piace l'aglio" e $B =$ "voglio mangiare l'aglio"

ci ha che ① non (A e (non B)) \Leftrightarrow ② (non A) o B

\Leftrightarrow ③ A \Rightarrow B

② "Non mi piace l'aglio o voglio mangiare l'aglio"

③ "Se mi piace l'aglio allora voglio mangiare l'aglio" e.v.d.

N.B.: se non mette i due punti, la proposizione si può leggere come segue

"(non (non mi piace l'aglio)) e (non voglio mangiarlo)"

Esercizio: Negare la seguente proposizione

" $\forall a > 0, \exists b \in \mathbb{R}$ tale che $a > b > 0$ " ①

dim. Per negare ①, ovvero costruire la proposizione non ①, si procede così

"non ($\forall a > 0, \exists b \in \mathbb{R}$ T.c. $a > b > 0$)" non ①

" $\exists a > 0 : \forall b \in \mathbb{R} \quad b > a \text{ o } 0 > b$ " ②

Osserviamo che non ① è palesemente falsa (come pure ② è palesemente falsa, in quanto non ① \Leftrightarrow ②) e.v.d.

Insiemi

Gli insiemi si possono dare (rappresentare) in due modi

per **elencazione**: $A = \{2, 3, 4, 5\}$ $B = \{-2, 2\}$

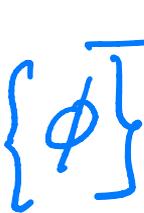
per **caratteristica**: $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 6\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$

a volte /

\in (appartenenza): $2 \in A$, $3 \notin B$
 x è un elemento dell'insieme A
 ovvero
 x appartiene a A

Relazione di \in

\emptyset (insieme vuoto) \equiv_{Def} è l'insieme che non possiede elementi
 ovvero
 $\forall x, x \notin \emptyset$



Relazione TRA INSIEMI

$\Omega \subset \Sigma$: \subseteq (inclusione) \equiv_{Def} " $\Omega \subseteq \Sigma \iff \forall x \in \Omega, x \in \Sigma$ "

\cap (intersezione) \equiv_{Def} " $\Omega \cap \Sigma = \{x : x \in \Omega \text{ e } x \in \Sigma\}$ "

\cup (unione) \equiv_{Def} " $\Omega \cup \Sigma = \{x : x \in \Omega \text{ o } x \in \Sigma\}$ "

Ω^c (complementare di Ω) \equiv_{Def} " $\Omega^c = \{x : x \notin \Omega\}$ "

\setminus (differenza) \equiv_{Def} " $\Omega \setminus \Sigma = \{x : x \in \Omega \text{ e } x \notin \Sigma\}$ "

Obs: $\Omega \setminus \Sigma = \Omega \setminus (\Sigma \cap \Omega) = \Omega \cap \Sigma^c$

Obs: $(\Omega^c)^c = \Omega$

Obs: $\emptyset^c = U$ = insieme universo (o universo)

Teorema (Leggi di De Morgan) Dati gli insiemi Ω e Σ

$(\Omega \cap \Sigma)^c = \Omega^c \cup \Sigma^c$ (i)

$(\Omega \cup \Sigma)^c = \Omega^c \cap \Sigma^c$ (ii)

dim (i) $(\Omega \cap \Sigma)^c = \{x : x \in \Omega \text{ e } x \in \Sigma\}^c$
 $= \{x : x \notin \Omega \text{ o } x \notin \Sigma\} = \Omega^c \cup \Sigma^c$

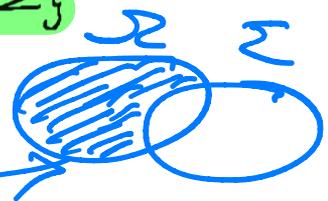
analogamente si prova (ii)

Complementare di Omega

Complementare di Sigma

e.v.d.

OPERAZIONI



Dimostrare che $A \equiv B$, dove A e B sono 12 insiemi

Quando si deve provare che due insiemi A e B sono uguali, si procede provando che

- i) $A \subseteq B$ ovvero $\forall x \in A, x \in B$
- ii) $B \subseteq A$ " $\forall x \in B, x \in A$

N.B.: l'equivalente algebrico della doppia inclusione è $x = \sqrt{2}$ ma $(x \leq \sqrt{2})$ e $(x \geq \sqrt{2})$!!

Tra numeri

distributiva
della
rispetto
+

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Proviamo ad esempio che $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(i) Provo $\Sigma = (A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C) = \Omega$

Provo $x \in \Sigma$, $x \in A \cap B$ o $x \in C$

① $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in A \cup C$ e $x \in B \cup C \Rightarrow x \in \Omega$ ✓

② $x \in C \Rightarrow x \in A \cup C$ e $x \in B \cup C \Rightarrow x \in \Omega$ ✓

e la (i) è completamente provata

(ii) Provo $\Omega = (A \cap B) \cup C \supseteq (A \cup C) \cap (B \cup C) = \Sigma$

Provo $x \in \Omega \Rightarrow x \in (A \cup C)$ e $x \in (B \cup C)$

① $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C = \Sigma$ ✓

② $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C \Rightarrow x \notin \Sigma$ e quindi non devo tentarlo

③ $x \in B$ e $x \notin A$ e $x \notin C \Rightarrow x \notin \Sigma$ e quindi non devo tentarlo

④ $x \in A \cap B$ e $x \notin C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow x \in \Sigma$ ✓

Dimostrazione alternativa (sfruttando le equivalenze logiche)

$$(A \cap B) \cup C = \{x : x \in C \text{ o } (x \in A \text{ e } x \in B)\}$$

$$= \{x : (x \in C \text{ o } x \in A) \text{ e } (x \in C \text{ o } x \in B)\}$$

$$= (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

unione

unione

$\mathcal{P}(A)$

$\mathcal{P}(\Omega)$ (insieme delle parti di Ω) \equiv_{Def}

l'insieme dei sottoinsiemi di Ω
ovvero 14

$\forall B: B \subseteq B$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{E: E \subseteq \Omega\}$

$\forall B$

$A \subseteq B$

Oss: $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall \Omega$
 $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall \Omega$

$\emptyset \subseteq B$

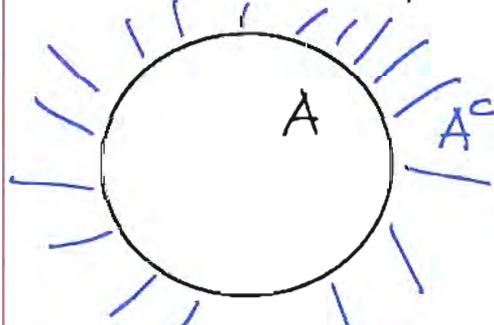
Coppie ordinate

\mathbb{R}^2

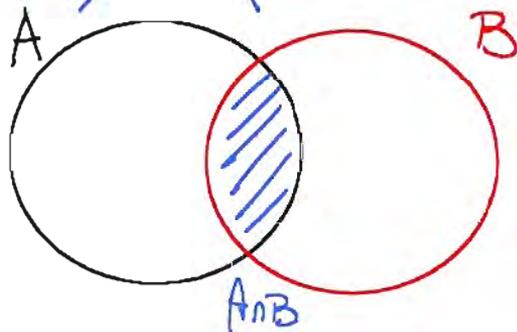
$\Omega \times \Sigma$ (Prodotto cartesiano) $\equiv_{\text{Def}} \Omega \times \Sigma = \{(x,y): x \in \Omega \text{ e } y \in \Sigma\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

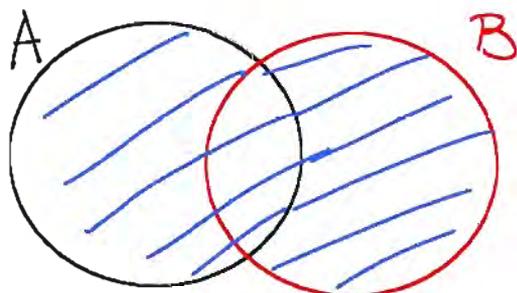
Il prodotto cartesiano è l'insieme delle coppie ordinate (x,y) aventi come primo elemento $x \in \Omega$ e come secondo elemento $y \in \Sigma$; talvolta si scrive $\{x, (x,y)\}$ in modo da evidenziare il primo elemento.



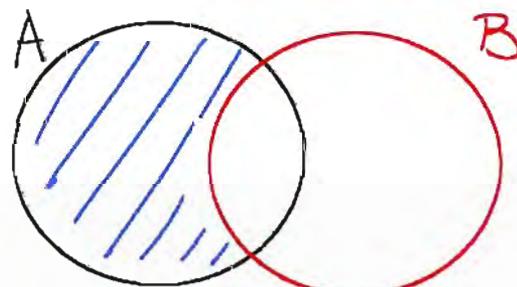
Insieme complementare A^c



$A \cap B$, l'intersezione tra A e B



$A \cup B$, l'unione tra A e B



$A \setminus B$, la differenza tra A e B

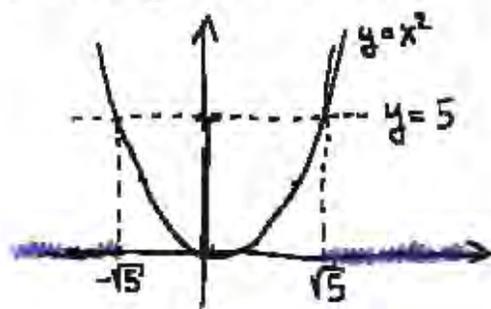
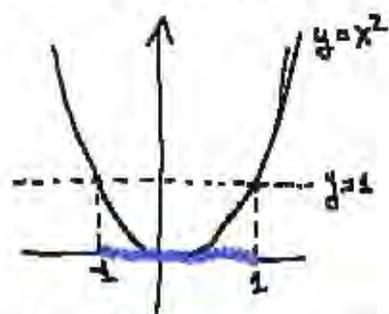
Esercizi proposti

15



Esercizio 1.20 : determinate gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1 \text{ o } x^2 \geq 5\}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 100 \text{ e } (2x - 1 < 0 \text{ o } x > 7)\}$.

dim $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1 \text{ o } x^2 \geq 5\} = A \cup B$



$A = [-1, 1]$ $B =]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$

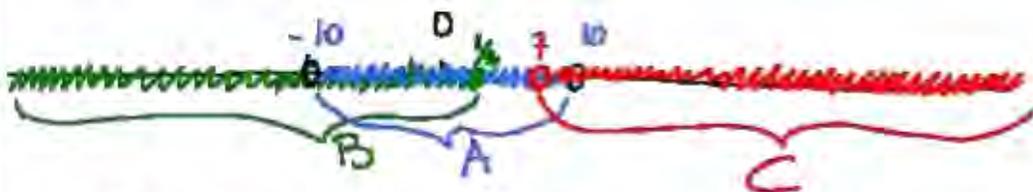
$\Rightarrow E = A \cup B =]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [-1, 1] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$

$F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 100 \text{ e } (2x - 1 \leq 0 \text{ o } x > 7)\}$
 $= A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 100\} =]-10, 10[$

$B = \{x \in \mathbb{R} : 2x \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2}\} =]-\infty, \frac{1}{2}]$

$C = \{x \in \mathbb{R} : 7 < x\} =]7, +\infty[$



$F = (A \cap B) \cup (A \cap C) =]-10, \frac{1}{2}] \cup]7, 10[$ III

N.B. Per risolvere adeguatamente l'esercizio converrebbe risolvere le disequazioni, mentre qui facciamo uso del grafico di $y = x^2$



Esercizio 1.21 : dite quali fra le seguenti uguaglianze sono vere:

a) $\{x \in \mathbb{R} : (x > 2 \text{ e } x < 6) \text{ o } x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \text{ e } (x < 6 \text{ o } x < 0)\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : (x < 1 \text{ o } x > 3) \text{ e } x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ o } (x < 1 \text{ e } x \geq -3)\}$

dim. vediamo la a), che si può risolvere come

$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

dove $A =]2, +\infty[$ $B =]-\infty, 6[$ $C =]-\infty, 0[$

$(A \cap B) \cup C =]2, 6[\cup]-\infty, 0[$

$$A \cap (B \cup C) =]2, +\infty[\cap (]-\infty, 5[) =]3, 5[\quad 16$$

donque la a) è falsa

La b) equivale a

$$(-\infty, 1[\cup]3, +\infty[) \cap]-\infty, 2] =]-\infty, 0[\cup (]-\infty, 1[\cap]-3, +\infty[)$$

che equivale a

$$(-\infty, 1[\cap]-\infty, 2] \cup (]3, +\infty[\cap]-\infty, 2]) =]-\infty, 0[\cup]-3, 1[$$

$$]-\infty, 1[\cup \emptyset =]-\infty, 1[\quad \text{VERA} \quad \blacksquare$$

Esercizio 1.23 : provate le seguenti formule:

- a) $|G \subset E| \iff \forall E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup G$ ← non è da provare!
- b) $E \setminus F = E \cap F^c$
- c) $|E \setminus F = \emptyset| \iff |E \subset F|$
- d) $(E \setminus F) \cap (F \setminus E) = \emptyset$

$$\begin{aligned} b) \quad E \setminus F &= \{x \in \mathbb{R} : x \in E \text{ e } x \notin F\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in E\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \notin F\} \\ &= E \cap F^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad E \setminus F = E \cap F^c = \emptyset &\implies \forall x \in E, x \notin F^c \\ &\implies \forall x \in E, x \in F \\ &\implies E \subset F \end{aligned}$$

Proviamo il viceversa

$$E \subset F \implies E \cap F^c = \emptyset \implies E \setminus F = E \cap F^c = \emptyset$$

$$\begin{aligned} d) \quad (E \setminus F) \cap (F \setminus E) &= (E \cap F^c) \cap (F \cap E^c) = (E \cap F^c \cap F) \cap (E \cap E^c) \\ &= (E \cap F^c \cap F) \cap \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

$(E \cap F^c \cap E^c) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

in quanto non ci sono elementi in comune tra un insieme ed il suo complementare. \blacksquare



Esercizio 1.24 : determinate $\mathcal{R}(\{a, 1, \bullet\})$.



Esercizio 1.25 : determinate tutti gli elementi di $\{1, x\} \times \{a, 1, \bullet\}$.

Operatori logici e insiemistici

18

Se si considerano $\Omega \equiv \text{universo} \equiv \phi^c$
 $\phi \equiv \text{insieme vuoto} \equiv \Omega^c$

si ha che

A	A^c
ϕ	Ω
Ω	ϕ

Q	$\text{mem } Q$
V	F
F	V

A	B	$A \cap B$
ϕ	ϕ	ϕ
ϕ	Ω	ϕ
Ω	ϕ	ϕ
Ω	Ω	Ω

Q	\mathcal{B}	$Q \in \mathcal{B}$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

A	B	$A \cup B$
ϕ	ϕ	ϕ
ϕ	Ω	Ω
Ω	ϕ	Ω
Ω	Ω	Ω

Q	\mathcal{B}	$Q \notin \mathcal{B}$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Ne segue che posso verificare il valore di verità di una proposizione logica trasformandola in un'espressione ove compaiono

A^c in luogo di $\text{mem } Q$

\cap " " " \in

\cup " " " \notin

ϕ " " " F (falso)

Ω " " " V (vero)

Ne segue che vale

Operatori Logici

negazione: $\text{non } A$

congiunzione: $A \wedge B$

disgiunzione: $A \vee B$

implicazione: $A \Rightarrow B$

equivalenza: $A \Leftrightarrow B$

Operatori Insiemeistici

complementare: A^c

intersezione: $A \cap B$

unione: $A \cup B$

$$A^c \cup B = (A \cap B^c)^c = (A \cdot B)^c$$

$$(A \cdot B)^c \cap (B \cdot A)^c = (A \Delta B)^c$$

disgiunzione esclusiva: $A \text{ aut } B$
vedi in seguito la def!

differenza simmetrica

$$A \Delta B = (A \cdot B) \cup (B \cdot A)$$

Oss: $\text{non}(\text{non } A) = A$

$$(A^c)^c = A$$

S

Esercizio: Provare che (Es 1.8)

$$"(A \wedge B) \circ C" \Leftrightarrow "(A \circ C) \wedge (B \circ C)" \quad \forall A, B, C$$

$$"(A \circ B) \wedge C" \Leftrightarrow "(A \wedge C) \vee (B \wedge C)" \quad "$$

$$(A \cap B) \cup C \equiv (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad \forall A, B, C$$

$$(A \cup B) \cap C \equiv (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad "$$

Esercizio (leggi di de Morgan)

$$"\text{non}(A \wedge B)" \text{ equivale a } "(\text{non } A) \vee (\text{non } B)"$$

$$"\text{non}(A \circ B)" \quad " \quad " \quad "(\text{non } A) \wedge (\text{non } B)"$$

$$(A \cap B)^c \equiv A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c \equiv A^c \cap B^c$$

Tabella di verità di "aut"

\equiv Def	A	B	$A \text{ aut } B$
	F	F	F
	F	V	V
	V	F	V
	V	V	F

Oss: l'operatore "aut" è l'operatore "o esclusivo", ovvero quello che in italiano compare come "o magari, la minestrina o nelli la finestrina" in cui la frase è vera se è vera 1! (una ed una sola) delle due affermazioni (non si può digiunare nella stanza e non si può fare ginnastica quando si sta mangiando!!)

Esercizio: Provare che " $A \text{ aut } B$ " se " $[(\text{non } A) \text{ e } B] \text{ o } [A \text{ e } (\text{non } B)]$ " (è la traduzione in simboli della precedente affermazione)

S

Esercizio: Provare che " $A \text{ aut } B$ " se " $(A \text{ o } B) \text{ e } [(\text{non } A) \text{ o } (\text{non } B)]$ "
 se " $(A \text{ o } B) \text{ e } [\text{non } (A \text{ e } B)]$ "
 se " $\text{non } (A \Leftrightarrow B)$ "

Oss:

$$\begin{aligned}
 A \Delta B &\equiv (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \equiv [(A \cup B)^c \cup (A \cap B)]^c \\
 &\equiv (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\
 &\equiv [A \cap (A^c \cup B^c)] \cup [B \cap (A^c \cup B^c)] \\
 &\equiv [(A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)] \cup [(B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)] \\
 &\equiv (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\
 &\equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)
 \end{aligned}$$

Oss:

$$"a \text{ out } B" \Leftrightarrow "(a \in B) \wedge \neg [a \in B]"$$

$$\Leftrightarrow "(a \in B) \wedge \neg [(a \in A) \vee (a \in B)]"$$

$$\Leftrightarrow \{ a \in [(a \in A) \vee (a \in B)] \}$$

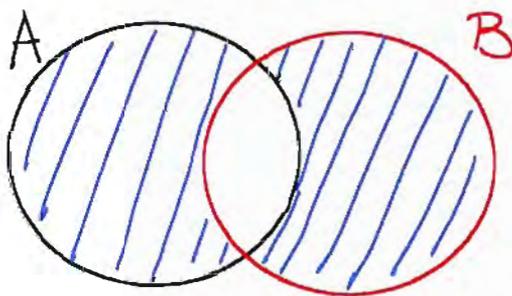
$$\vee \{ a \in [(a \in A) \vee (a \in B)] \}$$

$$\Leftrightarrow \{ [(a \in A) \vee (a \in B)] \vee [(a \in A) \vee (a \in B)] \}$$

$$\vee \{ [(a \in A) \vee (a \in B)] \vee [(a \in A) \vee (a \in B)] \}$$

$$\Leftrightarrow [(a \in A) \vee (a \in B)] \vee [(a \in A) \vee (a \in B)]$$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) =$ differenza
simmetrica



$A \Delta B$, la differenza
simmetrica tra A e B

Esercizio: Provare che $A \Delta B = A \cup B - (A \cap B)$

olim. per definizione $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$$= [(A \cap B^c) \cup A^c] \cap [(A \cap B^c) \cup B]$$

$$\sum_n (A \cup A^c) = \sum \forall z! = [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)] \cap [(A \cup B) \cap (B^c \cup B)]$$

$$\sum_n (B \cup B^c) = \sum = (B^c \cup A^c) \cap (A \cup B)$$

$$\text{ma } A \Delta B = (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c)$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

per la legge di de Morgan

Alternativamente si può provare che

$$A \Delta B \subseteq (A \cup B) - (A \cap B) \quad \text{e} \quad (A \cup B) - (A \cap B) \subseteq A \Delta B$$

Operatori logici e algebra

22

È possibile verificare il valore di verità di una proposizione per via algebrica, introducendo l'operatore

$$\text{"-"} : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

con definito

$$\overline{0} = 1 \quad \overline{1} = 0$$

l'operatore

$$\text{"\cdot"} : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

con definito

$$0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$$

l'operatore

$$\text{"+"} : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

con definito

$$0+0=0 \quad 0+1=1+0=1+1=1$$

In tal modo un predicato logico si trasforma in una espressione algebrica

$$V \equiv \text{vero} \longrightarrow 0$$

$$F \equiv \text{falso} \longrightarrow 1$$

$$\text{non } A \longrightarrow \overline{A}$$

$$e \longrightarrow \cdot$$

$$o \longrightarrow +$$

Ad esempio il predicato

$$\text{"non } (A \text{ o } B) \equiv (\text{non } A) \text{ e } (\text{non } B)\text{"}$$

$$\overline{(A+B)} \stackrel{\text{disjuntiva}}{\equiv} \overline{A} \cdot \overline{B}$$

e sostituendo tutte le possibili combinazioni di 0 e 1

$$\overline{0+0} = \overline{0} = 1 = 1 \cdot 1 = \overline{0} \cdot \overline{0}$$

$$\overline{0+1} = \overline{1} = 0 = 1 \cdot 0 = \overline{0} \cdot \overline{1}$$

$$\overline{1+0} = \overline{1} = 0 = 0 \cdot 1 = \overline{1} \cdot \overline{0}$$

$$\overline{1+1} = \overline{1} = 0 = 0 \cdot 0 = \overline{1} \cdot \overline{1}$$

Esercizio Per quali valori di verità di A e B
il predicato $[A \wedge (\text{non } B)]$ e $[A \vee (\text{non } B)]$ 23
è vero?

dim

$$\begin{aligned}(0 \cdot \bar{0}) \cdot (0 + \bar{0}) &= (0 \cdot 1) \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 1 = 0 \\ (0 \cdot \bar{1}) \cdot (0 + \bar{1}) &= (0 \cdot 0) \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 = 0 \\ (1 \cdot \bar{0}) \cdot (1 + \bar{0}) &= (1 \cdot 1) \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 = 1 \\ (1 \cdot \bar{1}) \cdot (1 + \bar{1}) &= (1 \cdot 0) \cdot (1 + 0) = 0 \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

e dunque il predicato è vero

ma A è vera e B è falsa c.v.d.

Esercizio: provare che

$$A \vee \text{non } A$$

è sempre vera

dim

$$\begin{aligned}A=0 & \quad 0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1 \\ A=1 & \quad 1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1\end{aligned}$$

e dunque è sempre vera c.v.d.

Esercizio quando il predicato

$$[A \vee (\text{non } B)] \wedge [(\text{non } A) \vee B]$$

è vero?

dim devo considerare i 4 casi $(A, B) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$$\begin{aligned}(0 + \bar{0}) \cdot (\bar{0} + 0) &= (0 + 1) \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1 \\ (1 + \bar{0}) \cdot (\bar{1} + 0) &= (1 + 1) \cdot (0 + 0) = 1 \cdot 0 = 0 \\ (0 + \bar{1}) \cdot (\bar{0} + 1) &= (0 + 0) \cdot (1 + 1) = 0 \cdot 1 = 0 \\ (1 + \bar{1}) \cdot (\bar{1} + 1) &= (1 + 0) \cdot (0 + 1) = 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

e scopri che il predicato è vero ma

$(A$ falso e B falso) \vee $(A$ vero e B vero)

ovvero

$$[A \vee (\text{non } B)] \wedge [(\text{non } A) \vee B] \iff "A \iff B" \text{ c.v.d.}$$

Il paradosso di Russell

Il paradosso di Russell recita

"Esiste un barbiere che fa la barba a tutti coloro che non si fanno la barba da se'."

Ma il barbiere si fa o no la barba da solo?

- se si fa la barba da solo: FALSO

- se non si fa la barba da solo: FALSO

Un'altra forma è la seguente

"tutti i cretesi sono mentitori, lo sono cretese"

Questa frase è vera o falsa?

L'origine del paradosso di Russell (o del barbiere o del mentitore) nasce da una voluta confusione tra i simboli \in e \subseteq . Infatti tutti questi paradossi si possono ricondurre al seguente

\mathcal{R} { "Esiste un insieme Ω che contiene tutti gli insiemi che non contengono se stessi"

Cosa posso dire delle seguenti implicazioni

$\Omega \in \Omega \Rightarrow \mathcal{R}$ è vera? NO!

$\Omega \subseteq \Omega \Rightarrow \mathcal{R}$ è vera? NO!

Entrambe sono false, il che è paradossale in quanto gli assiomi logici sono

$\forall a \quad a \vee (\text{non } a) \text{ \u00e9 vera (Principio Terzo escluso) } 25$
 $\forall a \quad \text{non}(\text{non } a) \text{ \u00e9 vera (Principio non contraddizione)}$
 $\forall a, b, c \quad [(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c) \text{ \u00e9 vera}$
(Principio di transitivit\u00e0)

e viola il principio del 3\u00b0 escluso

Esistono insiemi che contengono se stessi come elemento?

- Un insieme di vidini non \u00e9 un vidino

- Un insieme di numeri non \u00e9 un numero

per\u00f2

- Un insieme di insiemi \u00e9 un insieme

(l'insieme $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\} = \text{parti di } A$

\u00e9 un insieme che ha come elementi degli insiemi)