Algebra (4 ore)

Numeri reali

Numeri razionali: assiomi $+$; $\cdot$; distributiva; ordine totale

Legge dell'annullamento del prodotto

Teorema fondamentale dell'Algebra

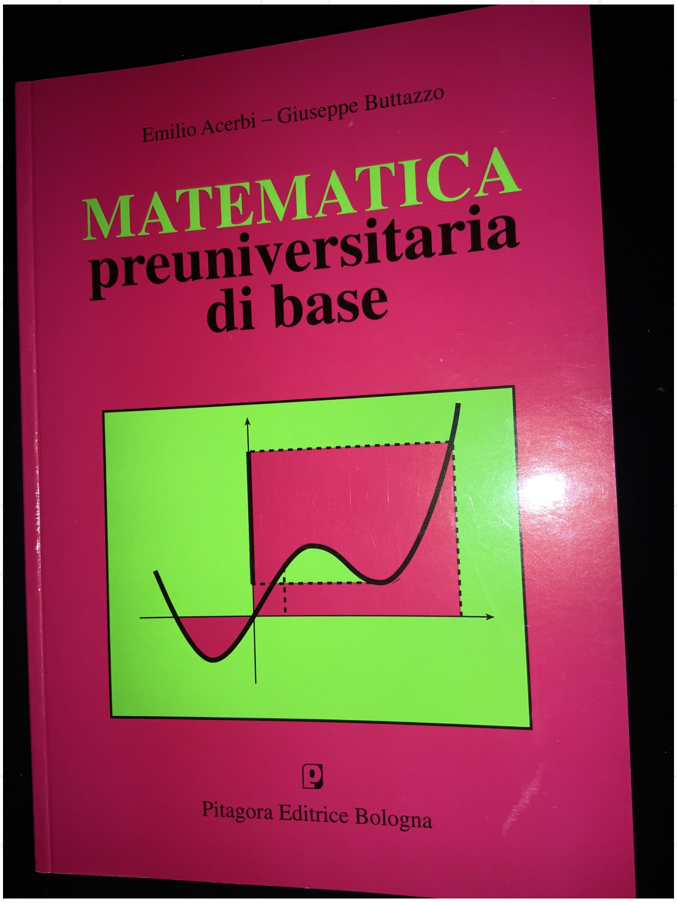
" di Ruffini

Divisione tra polinomi

Esercizi

Appendice: radici razionali e irrazionalità di $\sqrt{2}$

N.B. Fondamentale Teorema Ruffini, divisione tra polinomi, Esercizi, radici razionali polinomio (quest'ultimo va enunciato almeno con un esempio di equazione $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$ in cui cerco i divisori di a_n e di a_0)



Algebra (4 ore)

Numeri reali
Numeri razionali: assiomi $+$; $\cdot$; distributiva; ordine totale
Legge dell'annullamento del prodotto
Teorema Fondamentale dell'Algebra
" di Ruffini
Divisione tra polinomi
Esercizi
Appendice: radici razionali e irrazionalità di $\sqrt{2}$

N.B. Fondamentale Teorema Ruffini, divisione tra polinomi, Esercizi, radici razionali polinomio (quest'ultimo va enunciato almeno con un esempio di equazione $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$ in cui cerco i divisori di a_n e di a_0)

Algebra (4 ore)

Numeri reali
Numeri razionali : assiomi $+$; $\cdot$; distributiva; ordine totale
Legge dell'annullamento del prodotto
Teorema Fondamentale dell'Algebra
" di Ruffini
Divisione tra polinomi
Esercizi
Appendice: radici razionali e irrazionalità di $\sqrt{2}$

N.B. Fondamentale Teorema Ruffini, divisione tra polinomi, Esercizi, radici razionali polinomio (quest'ultimo va enunciato almeno con un esempio di equazione $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$ in cui cerco i divisori di a_n e di a_0)

I numeri reali $\mathbb{R} \equiv_{Def}$ $\mathbb{R}$ è un insieme numerico che soddisfa l'assioma di Dedekind (di completezza) insieme a tutti gli assiomi dei numeri razionali 1

$\mathbb{Q}$ è denso ma non è completo

I numeri razionali $\mathbb{Q} \equiv_{Def}$ sono i numeri della forma a/b con $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sono definite le operazioni

$\forall a,b \in \mathbb{Q}$
$\exists c \in \mathbb{Q}:$
$a < c < b$
$\frac{a+b}{2}$

$+: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
- associativa $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$
- commutativa $x+y = y+z$ $\forall x,y \in \mathbb{Q}$
- $\exists$ elemento neutro: 0 $x+0=0+x=x$ $\forall x \in \mathbb{Q}$
- $\exists$ opposto $\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y = -x \in \mathbb{Q}$: $x+y=y+x=0$

$\exists x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}$: $x+y=y+x=0$

$\cdot: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
- associativa $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$
- commutativa $x \cdot y = y \cdot x$ $\forall x,y \in \mathbb{Q}$
- $\exists$ elemento neutro: 1 $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ $\forall x \in \mathbb{Q}$
- $\exists$ inverso $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\ \exists y = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: $x \cdot y = y \cdot x = 1$

Proprietà distributiva

$(x+y) \cdot z = xz + yz = zx + zy = z(x+y)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$

Ordine totale $\leq$

(ovvero $\forall x,y \in \mathbb{Q}$ vale 1! tra le seguenti eventualità

$x<y$ ó $x=y$ ó $x>y$

$\boxed{\text{aut}}$ ovvero or esclusivo)

Una e una sola condizione è (sempre) vera

$x \leq y$ sse $0 \leq y-x$ $\forall x,y \in \mathbb{Q}$

l'ordine soddisfa i seguenti assiomi

(i) $x \le y$ e $z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+z \le y+z$ ← Compatibilità

(ii) $x \le y$ e $z \ge 0 \Rightarrow x \cdot z \le y \cdot z$ ←

Oss: 0 è elemento assorbente in $\mathbb{Q}$: $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \ \forall x \in \mathbb{Q}$

(infatti: $0 \cdot x = (2-2) \cdot x = 2x - 2x = 0$

-2 opposto di 2 — distributiva — -2x è l'opposto di 2x

Risolvere le equazioni in $\mathbb{Q}$ si procede utilizzando gli assiomi

(1) $x + a = b$ sse $x + a + (-a) = b + (-a)$

sse $x = b - a \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$

(2) $x \cdot a = b$ sse $x \cdot a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = b \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$ se $a \neq 0$

sse $x = b/a$ se $a \neq 0$

N.B. importante osservare che nel caso (1) non servono ipotesi, mentre in (2) è essenziale $a \neq 0$. Si utilizzano l'esistenza dell'elemento neutro e l'esistenza dell'opposto (inverso quando $a \neq 0$)

N.B. Fare osservare che

$$x = a \iff x \le a \text{ e } x \ge a$$

Legge dell'annullamento del prodotto

$a \cdot b = 0$ sse $a = 0$ vel $b = 0$

che equivale a

$a \cdot b \neq 0$ sse $a \neq 0$ e $b \neq 0$ ← è la CONTRONOMINALE

Ovviamente vale la seguente forma più generale

$$A(x) \cdot B(x) = 0 \iff A(x) = 0 \text{ vel } B(x) = 0$$

Proprietà delle potenze:

$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ ←

$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ ←

$A^\alpha B^\alpha = (A \cdot B)^\alpha$

$\forall A, B > 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$q = 1$

$A^5 : A^5 = A^{5-5} = A^0$

se $A \neq 0$

$A^0 = 1$

$A^1 = A$

$A^2 = A \cdot A$

$A \cdot$?

A^n

A^z

$A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p}$

$A^{-1} = \left(\frac{1}{A}\right)^1$

$A^{\sqrt{2}}$

3^π

Teorema (fondamentale dell'algebra)

Dato $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

con $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ termine noto

$\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ t.c. $P(x_i) = 0$ $i = 1, \dots, n$

$a_n \cdot x^n$ termine di grado max

$a_n \neq 0$

Oss: non è detto che le n radici siano tutte distinte

Esempio $P_n(x) = (x-1)^{100}$ una sola radice $\bar{x} = 1$ con molteplicità algebrica 100

$\mathbb{C}$

$x + iy$

i è l'unità immaginaria

$\boxed{i^2 = -1}$

in $\mathbb{C}$

$x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x+2i)(x-2i)$

in $\mathbb{R}$, $P(x)$ ha "al massimo" n radici

Teorema (di Ruffini)

Dato un polinomio $P(x)$ di grado n

Se $P(a) = 0$ allora esiste $Q(x)$ di grado $n-1$ tale che $P(x) = Q(x)(x-a)$

$x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

$x = 2$ o $x = -2$

Nota Bene (importante) Per calcolare il polinomio $Q(x)$ nel Teorema di Ruffini si deve dividere $P(x)$ per il binomio $(x-a)$ dove $P(a) = 0$.

Questo calcolo va fatto utilizzando la divisione tra polinomi, e non la cosiddetta "Regola di Ruffini"

Esempio $P(x) = x^3 - 8$ Si osserva che i divisori di 8 sono $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$, ed inoltre $P(2) = 2^3 - 8 = 0$. Dunque, per il Teorema di Ruffini, $(x-2)$ divide (x^3-8)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \quad 0 \quad 0 \quad -8 & x-2 \\
\hline
x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & x^2 - 2x + 4 \\
\hline
// \quad 2x^2 \quad 0 \quad -8 & \\
2x^2 - 4x \qquad & \\
\hline
// \quad 4x - 8 & \\
4x - 8 & \\
\hline
// &
\end{array}
$$

ovvero

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 - 2x + 4)$

(si osservi che $x^2 - 2x + 4 = 0$ non ha soluzioni reali in quanto $\Delta = 4 - 16 < 0$)

$$ax^6 - 3x^3 + 2 = P(x)$$

ha grado 6

Vogliamo ridurlo (in $\mathbb{R}$)

$P(x)$ ha al max 6 radici;

cioè 6 valori x_i t. che

$$P(x_i) = 0$$

Come trovo "a"?

lo cerco tra i possibili

divisori del termine noto

$$\pm 1 \;;\; \pm 2$$

$P(1) = 0$

$$x^6 - 3x^3 + 2 = Q(x)(x-1)$$

$\downarrow$

$Q(x)$ ha grado $6-1=5$

Esercizio Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b} \quad ?$$

dim. Perché abbia senso l'identità, è necessario che ambo i membri siano definiti ovvero è necessario che

$$\boxed{a \neq 0,\ b \neq 0 \quad e \quad a+b \neq 0}$$

Sotto queste ipotesi, l'identità (*) equivale a

$$\frac{a+b}{a \cdot b}=\frac{1}{a+b}.$$

ovvero, moltiplicando ambo i membri per $a \cdot b \cdot (a+b)$, si ottiene

$$(a+b)^2 = ab$$

ovvero $a^2+b^2+2ab=ab$

ovvero $a^2+b^2+ab=0$

Dividendo tutto per b^2

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)+1=0$$

da cui, posto $x=\frac{a}{b}$, si arriva all'equazione

$$x^2+x+1=0$$

che non ha soluzioni reali, in quanto

$$\Delta=(1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$$

Dunque $\nexists\, a, b \in \mathbb{R}$ che soddisfano (*)! ∎

Esercizio 2.2 : dite quali fra le seguenti operazioni sono corrette:

S

$$\frac{\frac{x}{2}}{3}=\frac{2x}{3}, \qquad \frac{2+x}{2y}=\frac{1+x}{y}, \qquad \frac{\sqrt{3(1+a^2)}}{3}=\sqrt{1+a^2}, \qquad \frac{x}{x}=1.$$

Falsa — Falsa — Falsa — Verificato

} quali tra le seguenti sono delle identità

Esercizio 2.3 : semplificate l'espressione

QS

$$\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b-c}}\left(2+\frac{a^2-b^2-c^2}{bc}\right)+\frac{(a+b)^2}{2bc}.$$

Esercizio 2.4 : risolvete le seguenti equazioni:

QS

a) $(a+1)x-7a=2a-3x$

b) $x^2-x-6=0$

c) $x^2-5x+7=1$

d) $x^6-3x^3+2=0$.

← a) va fatto dal docente

dim (2.4) a) $(a+1)x - \cancel{7a} + 3x + \cancel{7a} = 2a - \cancel{3x} + \cancel{3x} + 7a$ 5

$$x(a+1+3) = 9a$$

$$x(a+4)\cdot\frac{1}{a+4} = 9a\cdot\frac{1}{a+4} \quad \forall a \neq -4$$

$$x = \frac{9a}{a+4} \quad \forall a \neq -4$$

b) $x^2 - x - 6 = 0$

1° modo $x^2 - x + (-3)\cdot(+2) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + (-3+2)\cdot x + (-3)\cdot(+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2x + (-3)\cdot(+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) + 2(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0 \quad (*)$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto $(*)$ equivale a $x-3=0$ o $x+2=0$

ovvero $x_1 = 3$ o $x_2 = -2$

2° modo: $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 6$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot x + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 6 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} + 6$$

$$\Leftrightarrow x - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+24}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+24} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

3° modo: $x^2 - x - 6 = 0 \, (*)$ i divisori di -6 sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Le soluzioni intere di $(*)$ sono da cercare tra i divisori del termine noto -6, e dunque tra $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Si osserva che $(-2)^2-(-2)-6 = 4+2-6=0$ ovvero $x_1=-2$ è soluzione di $(*)$ 6

Ma allora per il teorema di Ruffini $(x+2)$ divide x^2-x-6

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-6 & x+2 \\ \cline{2-2} x^2+2x & x-3 \\ \hline // \;\; -3x-6 & \\ -3x-6 & \\ \hline // & \end{array}$$

ovvero $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ e dunque ritrovo, per la legge dell'annullamento del prodotto, $x_1=-2 \lor x_2=3$

c) $x^2-5x+7=1 \iff x^2-5x+7+(-1)=1+(-1)$

$\iff x^2-5x+6=0$

(utilizzando la formula risolutiva) $\iff x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm1}{2}$

$\iff x_1=2 \lor x_2=3$

d) $x^6-3x^3+2=0 \quad (*)$

1° modo (eq. biquadratiche) Si pone $t=x^3$, e l'equazione risulta equivalente al sistema

$$\begin{cases} t=x^3 \\ t^2-3t+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t=x^3 \\ (t-2)(t-1)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t_1=x^3 \\ t_1=2 \end{cases} \lor \begin{cases} t_2=x^3 \\ t_2=1 \end{cases} \iff x_1=\sqrt[3]{2} \lor x_2=1$$

2° modo: $x^6-3x^3+2=0 \quad (*)$

Le soluzioni intere di $(*)$ si trovano tra i divisori di 2, ovvero appartengono all'insieme $\{\pm1, \pm2\}$

Non è difficile provare che $1^6-3\cdot1^3+2=0$ ovvero posto $P(x)=x^6-3x^3+2$ si ha $P(1)=0$

e dunque $x-1$ divide $P(x)$ x Thm. di Ruffini

$$
\begin{array}{l|l}
x^6 \quad 0 \quad 0 \quad -3x^3 \quad 0 \quad 0 \quad +2 & x-1 \\
x^6-x^5 & x^5+x^4+x^3-2x^2-2x-2 \\
\hline
// \quad x^5 \quad 0 \quad -3x^3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 & \\
\quad x^5-x^4 & \\
\hline
// \quad x^4 \quad -3x^3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 & \\
\quad x^4-x^3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 & \\
\hline
// \quad -2x^3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 & \\
\quad -2x^3+2x^2 & \\
\hline
// \quad -2x^2 \quad 0 \quad 2 & \\
\quad -2x^2+2x & \\
\hline
\quad -2x+2 & \\
\quad -2x+2 & \\
\hline
\quad // &
\end{array}
$$

ovvero

$$x^6-3x^3+2=(x-1)(x^5+x^4+x^3-2x^2-2x-2)$$

Ora le soluzioni intere di

$$x^5+x^4+x^3-2x^2-2x-2=0$$

sono da cercare tra i divisori di 2, ovvero in $\{\pm1,\pm2\}$

dove non se ne trovano.

Si ha che $(\sqrt[3]{2})^5+(\sqrt[3]{2})^4+(\sqrt[3]{2})^3-2(\sqrt[3]{2})^2-2\sqrt[3]{2}-2$

$$= \cancel{2\cdot2^{2/3}}+\cancel{2\cdot2^{1/3}}+\cancel{2}-\cancel{2\cdot2^{2/3}}-\cancel{2\cdot2^{1/3}}-\cancel{2} = 0$$

ovvero $x-\sqrt[3]{2}$ divide $x^5+x^4+x^3-2x^2-2x-2$

etc.

N.B. in d) non ha molto senso procedere nel secondo modo: come si può indovinare che $P(\sqrt{3})=0$

5 **Esercizio 2.5** : risolvete l'equazione

$$\frac{(2x^2+4)^2}{x(x^2-1)(x^2-4)}=0 . \qquad (*)$$

Perché abbia senso l'equazione è necessario che

$x\neq0$, $x^2-1\neq0$, $x^2-4\neq0$

ovvero $x\notin\{0,\pm1,\pm2\}$

Quando $x\notin\{0,\pm1,\pm2\}$ l'equazione $(*)$ equivale

$$(2x^2+4)^2=0$$

che non ha soluzioni

Esercizio 2.6 : risolvete i seguenti sistemi di equazioni:

DS a) $\begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x^2+4x-5)(x^2-3ax+2a^2)=0 \\ x^2-2ax=x-2a \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^4-3x^2+2=0 \\ x^4-5x^2+6=0 \end{cases}$.

b) va fatto dal docente

Risolvere un sistema $\begin{cases} A(x)=0 \\ B(x)=0 \end{cases}$ significa determinare, se ne esistono, i valori

$$x \in A \cap B, \quad \text{dove } A=\{x: A(x)=0\} \quad B=\{x: B(x)=0\}$$

a) $2x+1=0$ ha come unica soluzione $x=-\frac{1}{2}$

ma $\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1 = \frac{1}{4}+1+1 \neq 0$

e dunque il sistema a) non ha soluzioni

b) Il sistema è equivalente (= ha le stesse soluzioni) del seguente

$$\begin{cases} (x^2+4x-5)(x^2-3ax+2a^2)=0 & (i) \\ x^2-x(2a+1)+2a=0 & (ii) \end{cases}$$

Questo sistema equivale al seguente (legge dell'annullamento del prodotto)

$$\begin{cases} x^2+4x-5=0 \ \text{ o } \ x^2-3ax+2a^2=0 \\ x^2-x(2a+1)+2a=0 \end{cases}$$

ovvero equivale a (infatti $A \cap (B \cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$)

$$b_1)\begin{cases} x^2+4x-5=0 \\ x^2-x(2a+1)+2a=0 \end{cases} \quad \text{o} \quad b_2)\begin{cases} x^2-3ax+2a^2=0 \\ x^2-x(2a+1)+2a=0 \end{cases}$$

ovvero

$$b_1)\begin{cases} (x+5)(x-1)=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases} \quad \text{o} \quad b_2)\begin{cases} (x-2a)(x-a)=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases}$$

$b_1)$ è soddisfatto da $x=1$ e, quando $a=-5/2$, da $x=-5=2a$

$b_2)$ è soddisfatto da $x=2a$ e, quando $a=1$, da $x=1=a$

Dunque b) è soddisfatto da $\{x=2a : a \in \mathbb{R}\}$

($x=1$ e $x=-5$ stanno in questo insieme)

Oppure $b_1)$ o $b_2)$ sono equivalenti a

$$\begin{cases} x+5=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x-1=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x-2a=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x-a=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases}$$

$x=-5=2a$ $\quad$ $x=1$ $\quad$ $x=2a$ $\quad$ $x=1=a$

$a=-\frac{5}{2}$ $\quad$ $a=1$

e si osserva che $\quad 2a, 1, -5 \in \{2a : a \in \mathbb{R}\}$

c) $\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} (x-2)(x-1)=0 \\ (x-3)(x-2)=0 \end{cases}$

e l'unica soluzione comune alle due equazioni è $\boxed{x=2}$

d) $\begin{cases} x^4-3x^2+2=0 \\ x^4-5x^2+6=0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} (x^2-2)(x^2-1)=0 \\ (x^2-3)(x^2-2)=0 \end{cases}$ che equivale a

$$\begin{cases} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-1)(x+1)=0 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0 \end{cases}$$

che, per l'annullamento del prodotto, equivale a

$$\begin{cases} x-\sqrt{2}=0 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x+\sqrt{2}=0 \\ \text{"} \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x-1=0 \\ \text{"} \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x+1=0 \\ \text{"} \end{cases}$$

$x=\sqrt{2}$ $\quad$ $x=-\sqrt{2}$ $\quad$ $\emptyset$ sol $\quad$ $\emptyset$ sol

e quindi le soluzioni sono $\quad x_1=\sqrt{2}, \quad x_2=-\sqrt{2}$ ////

Per risolvere il prossimo esercizio è necessario provare che

Proposizione: $x \le y$ e $z<0 \Rightarrow x \cdot z \ge yz$

dim gli assiomi dell'ordine dicono che

$a \le b \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow a+c \le b+c \quad$ (i)

$a \le b \quad c>0 \Rightarrow a \cdot c \le b \cdot c \quad$ (ii)

Sia $z<0$: allora $\quad -z>0$

$$x \le y \text{ e } -z>0 \overset{(ii)}{\Longrightarrow} -xz \le -yz$$

$$\overset{(i)}{\Longrightarrow} xz-yz \ge 0$$

$$\overset{(i)}{\Longrightarrow} xz \ge yz \quad \text{cioè la Tesi}$$

S

Esercizio 2.7 : dite (senza servirvi della calcolatrice, naturalmente) quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere:

$$\underbrace{\frac{2}{3} < \frac{3}{2}}_{\text{i) vera}}, \qquad -\frac{1}{5} < -1, \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{2}{4}, \qquad \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \geq 1$$

ii) falsa iii) vera iv) vera

Quando $a, b, c, d > 0$, si ha che

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ sse } 0 \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \text{ sse } 0 \leq \frac{cb}{db} - \frac{ad}{bd}$$

$$\text{sse } 0 \leq \frac{bc - ad}{bd} \quad \text{ma } bd > 0$$

$$\text{sse } 0 \leq bc - ad$$

$$\text{sse } ad \leq bc$$

ovvero $\left(\text{“} \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ sse } ad \leq bc \text{”} \right)$ va fatta dal docente

i) $\frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ sse $4 \leq 9$ e quest'ultima è vera!!

ii) $-\frac{1}{5} < -1$ sse $-1 + \frac{1}{5} > 0$ sse $-\frac{4}{5} > 0$ Assurdo!

dunque la ii) è falsa

(si poteva osservare che $-\frac{1}{5} < -1$ sse $\frac{1}{5} > 1$ sse $1 > 5$ Assurdo)

iii) $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{4}$ sse $\frac{1}{2} \leq \frac{\cancel{2}^{1} \cdot 1}{\cancel{2}_{1} \cdot 2}$ sse $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ Vera!

iv) $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \geq 1$ sse $\frac{1}{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} \geq 1$ sse $\frac{1}{\frac{5}{6}} \geq 1$

sse $\frac{6}{5} \geq 1$ che è VERA

Esercizio 2.8 : se $a < 0 < b < c$, dite quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere:

$$\underbrace{ab < ac}_{i)\text{ falsa}}, \quad \underbrace{ab \geq ac}_{ii)\text{ vera}}, \quad \underbrace{ab \leq ac}_{iii)\text{ falsa}}, \quad \underbrace{ab > 0}_{iv)\text{ falsa}}.$$

i) per ipotesi $a<0$ e $b<c \Rightarrow ab>ac$
e dunque la i) è falsa $(a=-5, b=1$ e $c=5)$

ii) nel punto i) si è provato $ab > ac$
$\Rightarrow ab \geq ac$ (*)

iii) è falsa: si veda i) $(a=-5, b=1$ e $c=5)$

iv) per ipotesi "$a<0<b$", ovvero $(a=-5$ e $b=1)$
"$a<0$ e $0<b$" $\Rightarrow$ "$a \cdot 0 > ab$"
$\Rightarrow$ "$0 > ab$"
da cui segue che (iv) è falsa ∎

N.B. (*) $A > B \Rightarrow A \geq B$
infatti "$A \geq B$" sse "$A>B$ o $A=B$"

N.B. L'esercizio 2,8 può essere riformulato supponendo
$a<b<0<c$ in un primo caso
$a<b<c<0$ in un secondo caso

Esercizio 2.9 : usando le proprietà delle disuguaglianze (☞ sezione 2.3), provate che se $a \leq b$ e $c \leq d$ allora $a+c \leq b+d$.

$$\left.\begin{array}{l} c \leq d \Rightarrow a+c \leq a+d \\ a \leq b \Rightarrow a+d \leq b+d \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{transitività}} a+c \leq b+d$$
∎

Esercizio 2.10 : è vero che se $a \leq b$ e $c \leq d$ allora $ac \leq bd$?

NO: $-7 \leq 1$ e $-4 \leq 3$, ma $(-7)(-4) = 28 > 1 \cdot 3 = 3$

Esercizio 2.16 : è vero che $\left((1+a^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{1+a^2}$? È vero che $\left((1+a)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{1+a}$?

$1+a^2 > 0$ $\forall a$, dunque $(1+a^2)^{2/3} = b$ è un numero ben definito e positivo, come pure è ben definito il numero

$$\left[(1+a^2)^{2/3}\right]^{3/4} = b^{3/4} = (1+a^2)^{1/2}$$

$1+a$ non è detto sia positivo, e quindi è definito $b = (1+a)^{2/3} \geq 0$

come pure è definito $\left((1+a)^{2/3}\right)^{3/4} = b^{3/4}$

ma non posso scrivere $\left((1+a)^{2/3}\right)^{3/4} \stackrel{?}{=} (1+a)^{1/2}$ in quanto, se $a=-2$, il membro a destra non è definito (poiché $\nexists$ radici quadrate dei numeri negativi)

Appendice: radici razionali di un polinomio a coefficienti interi; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Teorema Sia $a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 = P(x)$ un polinomio a coefficienti interi, cioè $a_i \in \mathbb{Z}$ $i=0 \dots m$

Se $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$ con $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, allora p divide a_0
q " a_m

dim

Proviamo che p divide a_0

Se $P\left(\frac{p}{q}\right) = a_m \frac{p^m}{q^m} + a_{m-1}\frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$

con p e q senza divisori comuni, allora

$a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} q + \dots + a_1 p \cdot q^{m-1} = -a_0 q^m$ allora

$p\left(a_m p^{m-1} + a_{m-1} p^{m-2} q + \dots + a_1 q^{m-1}\right) = -a_0 q^m$

Ma p e q non hanno divisori comuni, da cui segue che
p e q^m non " " "

Ne segue che necessariamente p divide a_0

Proviamo che q divide a_m

Da $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$ segue $a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} q + \dots + a_1 p q^{m-1} + a_0 q^m = 0$

da cui segue $-a_m p^m = q\left(a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p q^{m-2} + a_0 q^{m-1}\right)$

e, osservando che q e p^m non hanno divisori comuni, si ha che q divide a_m c.v.d.

Oss: Ne segue che le radici razionali - se ne esistono - sono legate ai divisori di a_0 e a_m

Corollario $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

dim Per assurdo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, allora esiste $x \in \mathbb{Q}$ t.c.
$x^2 = 2$, ovvero $x^2 - 2 = 0$. In questa equazione
$a_2 = 1$ $a_1 = 0$ $a_0 = -2$ e i divisori di a_2 sono ± 1
" " " a_0 " $\pm 1, \pm 2$

e dunque le possibili soluzioni razionali sono $+1, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$
e nessuno di questi numeri soddisfa $x^2 - 2 = 0$
Ma questo è assurdo, e quindi segue la Tesi $\lightning$