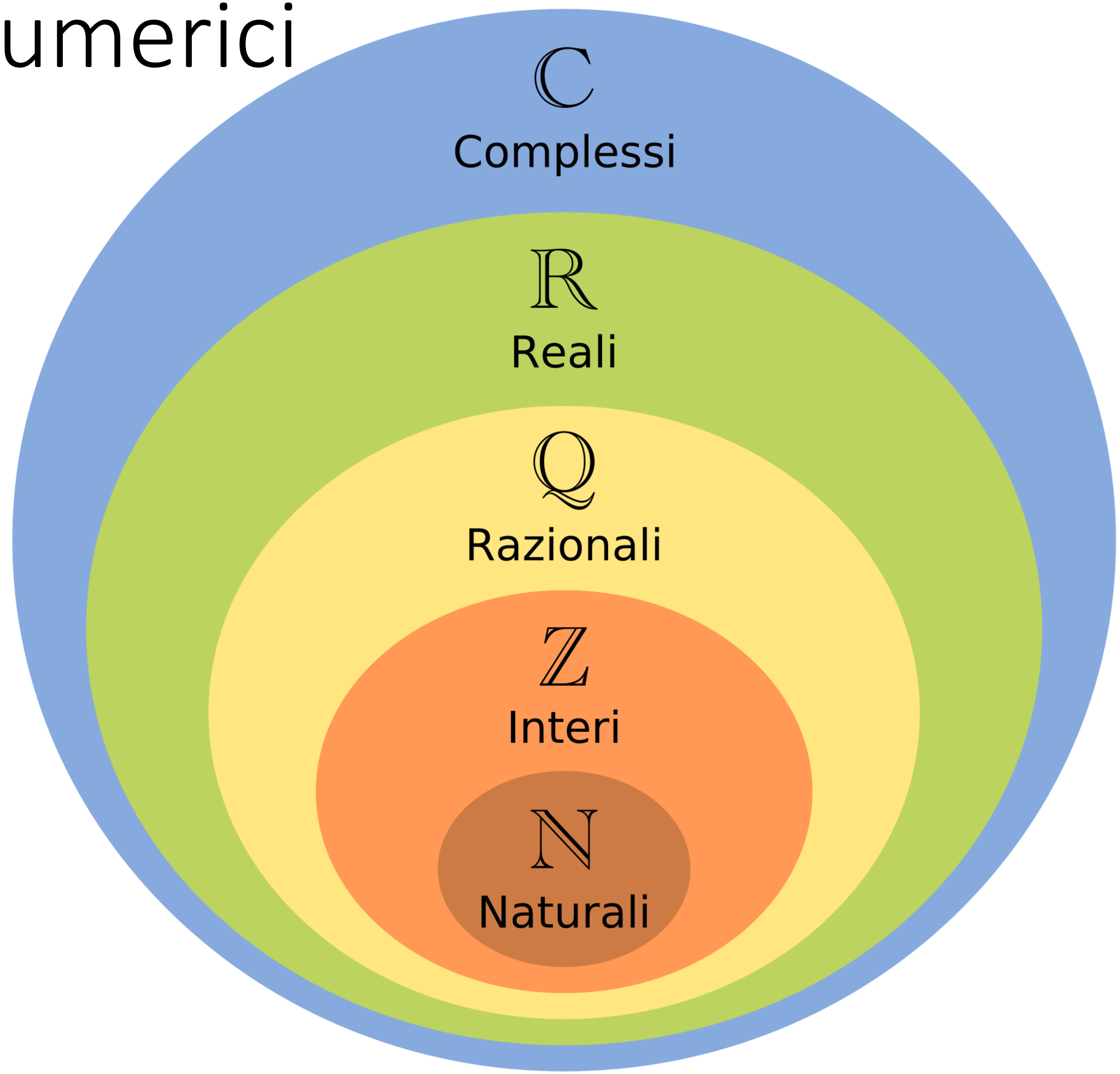
2° INCONTRO

ALGEBRA E SISTEMI LINEARI

Insiemi numerici



I numeri reali $\mathbb{R}$

L’insieme dei numeri reali soddisfa:

- L’assioma di Dedekind (o assioma di completezza)

- Tutti gli assiomi dei numeri razionali

I numeri razionali $\mathbb{Q}$

Sono tutti i numeri nella forma $\frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e sono definite le seguenti operazioni:

+ : $\mathbb{Q}$ x $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ Proprietà associativa

Proprietà commutativa

Esistenza dell'elemento neutro (0)

Esistenza dell'opposto. Che forma ha l'opposto?

$\cdot$: $\mathbb{Q}$ x $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ Proprietà associativa

Proprietà commutativa

Esistenza dell'elemento neutro (1)

Esistenza dell'inverso. Che forma ha l'inverso?

Proprietà distributiva e di ordine totale

$$(x + y) \cdot z = xz + yz = zx + zy = z(x + y)$$

Ordine totale

$$x < y \quad aut \quad x = y \quad aut \quad x > y$$

$x \leq y$ se e solo se $0 \leq y - x \quad \forall x, y \epsilon \mathbb{Q}$

Assiomi relativi all'ordine

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \quad \wedge \quad \boldsymbol{z} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \quad \wedge \quad \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$$

Oss: 0 è l'elemento assorbente in $\mathbb{Q}$

Risolvere le equazioni in $\mathbb{Q}$

Si procede usando gli assiomi appena visti

$x + a = b$ sse $x + a + (-a) = b + (-a)$ sse $x = b - a$ $\forall a, b \in \mathbb{Q}$

$x \cdot a = b$ sse $x \cdot a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = b \cdot (\frac{1}{a})$ sse $x = \frac{b}{a}$ $se\ a \neq 0$

Oss: nel primo caso non servono hp. Nel secondo caso è necessario che $a \neq 0$

Oss: $x = a \iff x \leq a \wedge x \geq a$

Legge di annullamento del prodotto

$$a \cdot b = 0 \quad sse \quad a = 0 \quad \vee \quad b = 0$$

che è equivalente a:

$$a \cdot b \neq 0 \quad sse \quad a \neq 0 \quad \wedge \quad b \neq 0$$

in forma più generale:

$$\boldsymbol{A(x) \cdot B(x) = 0} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{A(x) = 0} \quad \vee \quad \boldsymbol{B(x) = 0}$$

Proprietà delle potenze

$$\boldsymbol{(A^m)^p = A^{mp}} \qquad \forall A > 0 \quad \forall m, p \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{A^m A^p = A^{m+p}} \qquad \forall A > 0 \quad \forall m, p \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{A^m B^m = (AB)^m} \qquad \forall A, B > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

Teorema fondamentale dell’algebra

Dato $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$

$$\exists x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in \mathbb{C}\ tali\ che\ P(x_i) = 0\ con\ i = 1,2,\ldots,n$$

<u>Oss</u>: non è detto che le n radici siano tutte distinte (concetto molteplicità algebrica)

Teorema di Ruffini

Dato un polinomio $P(x)$ di grado n

Se $P(a) = 0$ allora $\exists Q(x)$ di grado n-1 tale che

$$P(x) = Q(x)(x - a)$$

N.B.: per calcolare il polinomio Q(x) nel teorema di Ruffini, si deve dividere P(x) per il binomio (x-a), dove P(a)=0

Oss: non confondere teorema di Ruffini con regola di Ruffini

Esempio con richiamo di divisione polinomi

Si prenda $P(x) = x^3 - 8$. Si osserva che:

I divisori di 8 sono: $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Si nota che $P(2) = 2^3 - 8 = 0$. Dunque sfruttando Th. Ruffini, si ha che:

$$(x-2) \text{ divide } (x^3 - 8)$$

Richiamo divisione tra polinomi

$$
\begin{array}{cccc|c}
x^3 & 0 & 0 & -8 & x-2 \\
-x^3 & +2x^2 & & & \\
\cline{1-4}\cline{5-5}
0 & +2x^2 & 0 & -8 & x^2+2x+4 \\
 & -2x^2 & +4x & & \\
\cline{1-4}
 & 0 & +4x & -8 & \\
 & & +4x & +8 & \\
\cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Esempio

Per quali valori di $a, b \epsilon \mathbb{R}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \qquad ?$$

Affinchè abbia senso l'identità, è necessario che:

$a \neq 0 \qquad b \neq 0 \qquad a + b \neq 0$

Sotto queste ipotesi si ha che l'identità inziale equivale a:

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $ab(a+b)$ ottengo:

$$(a+b)^2 = ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = ab$$

$$a^2 + ab + b^2 = 0$$

Divido tutto per b^2:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1 = 0$$

Pongo $\mathrm{x} = \frac{a}{b}$ e riscrivo l'equazione:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Che non ha soluzioni reali, in quanto il determinante è minore di 0.

Pertanto, $\nexists a, b \in \mathbb{R}$ che soddisfano l'identità inziale.

Esercizio 2.2

Esercizio 2.2 : dite quali fra le seguenti operazioni sono corrette:

$$\frac{\frac{x}{2}}{3} = \frac{2x}{3}\,, \qquad \frac{2+x}{2y} = \frac{1+x}{y}\,, \qquad \frac{\sqrt{3(1+a^2)}}{3} = \sqrt{1+a^2}\,, \qquad \frac{x}{x} = 1\,.$$

Esercizio 2.3

Esercizio 2.3 : semplificate l'espressione

$$\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b-c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b-c}}\left(2+\frac{a^2-b^2-c^2}{bc}\right)+\frac{(a+b)^2}{2bc}\ .$$

Esercizio 2.4a

Risolvere la seguente equazione:

a) $(a+1)x - 7a = 2a - 3x$

Esercizio 2.4b

Risolvere la seguente equazione:

b) $x^2 - x - 6 = 0$

Esercizio 2.4c

Risolvere la seguente equazione:

c) $x^2 - 5x + 7 = 1$

Esercizio 2.4d

Risolvere la seguente equazione:

d) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$

Esercizio 2.5

Risolvere la seguente equazione:

$$\frac{(2x^2+4)^2}{x(x^2-1)(x^2-4)}=0$$

Esercizio 2.7

Esercizio 2.7 : dite (senza servirvi della calcolatrice, naturalmente) quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere:

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{2}\,, \qquad -\frac{1}{5} < -1\,, \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{2}{4}\,, \qquad \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \geq 1\,.$$

Esercizio 2.8

Esercizio 2.8 : se $a < 0 < b < c$, dite quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere:

$$ab < ac\,, \qquad ab \geq ac\,, \qquad ab \leq ac\,, \qquad ab > 0\,.$$

Esercizio 2.9

Esercizio 2.9 : usando le proprietà delle disuguaglianze (☞ sezione 2.3), provate che se $a \le b$ e $c \le d$ allora $a + c \le b + d$.

Esercizio 2.10

Esercizio 2.10 : è vero che se $a \leq b$ e $c \leq d$ allora $ac \leq bd$?

Esercizio 2.16

Esercizio 2.16 : è vero che $\left((1+a^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{1+a^2}$? È vero che $\left((1+a)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{1+a}$?

Appendice: radici razionali di un polinomio a coefficienti interi

Teorema:

Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio a coefficienti interi, cioè $a_i \in \mathbb{Z}$ con i=0,1,…,n

Se $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ con $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, allora p divide a_0 e q divide a_n

Esempio

Scomporre il seguente polinomio:

$$2x^3 + 8x^2 + x + 4$$

Devo cercare i divisori di:

$$a_0 = 8 \ \rightarrow 1, 2, 4$$
$$a_3 = 2 \ \rightarrow 1, 2$$

Quindi i possibili tentativi che posso effettuare sono:

$$a = \pm 1;\ \pm\frac{1}{2}; \pm 2;\ \pm 4$$

Si nota che $P(-4) = 0$

Quindi si procede con la divisione di $P(x)$ per $(x + 4)$

Si ottiene $Q(x) = 2x^2 + 1$

Osservazione sul teorema e corollario

Ne consegue che le radici razionali, se esistono, sono legate ai divisori di a_0 e a_n

Corollario: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Opero una dimostrazione per assurdo. Se per assurdo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, allora:

$\exists x \in \mathbb{Q}$: $x^2 = 2$, ovvero $x^2 - 2 = 0$

In questa equazione $a_0 = -2$ e $a_n = a_2 = 1$

I divisori di

$$a_2 \text{ sono } \pm 1$$
$$a_0 \text{ sono } \pm 1, \pm 2$$

e dunque le possibili soluzioni razionali sono: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ e nessuno di questi 4 numeri soddisfa l'equazione iniziale.

Pertanto l'ipotesi ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) è assurda, e quindi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Sistemi lineari

Cosa vuol dire risolvere un sistema?

Cercare una soluzione comune a più equazioni

Cercare $\bar{x}$ soluzione di $\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \quad \dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ cercare $\bar{x} \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

Dove $A_1 = \{x : f_1(x) = 0\} \dots A_n = \{x : f_n(x) = 0\}$

Esercizio 2.6a

Risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\textbf{a)}\quad \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.6b

Risolvere il seguente sistema di equazioni

b) $$\begin{cases} (x^2 + 4x - 5)(x^2 - 3ax + 2a^2) = 0 \\ x^2 - 2ax = x - 2a \end{cases}$$

Esercizio 2.6c

Risolvere il seguente sistema di equazioni

c) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$

Esercizio 2.6d

Risolvere il seguente sistema di equazioni

d) $$\begin{cases} x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \\ x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \end{cases}$$

Sistemi lineari nelle variabili x,y

Un sistema lineare nelle variabili x,y:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Ha come soluzioni, se ne esistono, le coppie (x,y) che sono soluzioni simultaneamente di entrambe le equazioni.

Le due equazioni A e B, rappresentano rette nel piano cartesiano.

Interpretazione grafica

Noi sappiamo che le rette possono essere:

- Parallele $\longrightarrow$ Nessuna soluzione. Sistema impossibile.
- Incidenti $\longrightarrow$ 1 sola soluzione.
- Coincidenti $\longrightarrow$ ∞ soluzioni.

Sistema di 3 equazioni in 2 incognite

Possono presentarsi diversi casi:

1) Le rette sono distinte tra loro → Sistema impossibile
2) Due rette coincidono e sono parallele alla terza → Sistema impossibile
3) Due rette coincidono e incidono una terza → Una sola soluzione
4) Le tre rette coincidono → Infinite soluzioni

Come determino soluzioni sistema?

1) Per sostituzione

1) Per riduzione

oppure

Geometricamente

Esercizio 2.14a

Risolvere il seguente sistema di equazioni nelle due variabili x,y:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

Esercizio 2.14b

Risolvere il seguente sistema di equazioni nelle due variabili x,y:

$$\text{b)}\quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2.14c

Risolvere il seguente sistema di equazioni nelle due variabili x,y:

$$\text{c)} \quad \begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \end{cases}$$

Esercizio 2.14d

Risolvere il seguente sistema di equazioni nelle due variabili x,y,z:

$$\text{d)} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 2.15b

Disegnare nel piano cartesiano l'insieme soluzione di ciascuna riga del sistema, risolvere poi il sistema:

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x + y \geq 2 - 2x \\ x \leq y + 1 \\ x + 2y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.15c

Disegnare nel piano cartesiano l'insieme soluzione di ciascuna riga del sistema, risolvere poi il sistema:

$$\text{c)} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x - y < 0 \\ y < 1 \end{cases}$$