



Geometria Analitica

distanza tra due punti
equazione di una retta (parametrica; per due punti;
in forma esplicita; in forma implicita)
rette parallele e fascio improprio di rette
fascio proprio e rette perpendicolari
distanza punto-retta
Circonferenza
Parabola, fuoco, direttrice, vertice, asse
Retta tangente alla parabola (2 intersezioni che
collasano in 1 solo)
Retta tangente alla circonferenza (2 intersezioni che
collasano in 1 solo)

N.B. La ricerca della retta tangente ad una
circonferenza si può limitare alla osservazione
sulla \perp tra t e d e diametro.
La costruzione della parabola come luogo geometrico
può essere omessa.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ "ambiente" 1

Lo spazio METRICO $\mathbb{R}^2 \stackrel{\text{Def}}{=} \mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$

Distanza tra due punti $P=(x,y)$ e $Q=(z,w) \in \mathbb{R}^2$

$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty[$ è così definita

$$d((x,y), (z,w)) = \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}$$

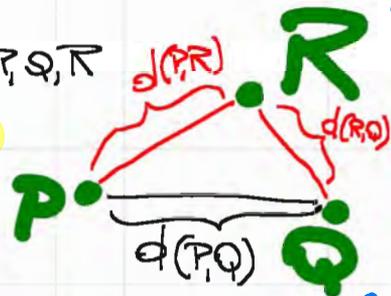
applicazione del piano sui reali non negati

NON NEG. (i) $d(P,Q) \geq 0 \forall P,Q$; $d(P,Q) = 0$ se e solo se $P=Q$

SIMMETRICA (ii) $d(P,Q) = d(Q,P) \forall P,Q$

(iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) \forall P,Q,R$

disuguaglianza Triangolare



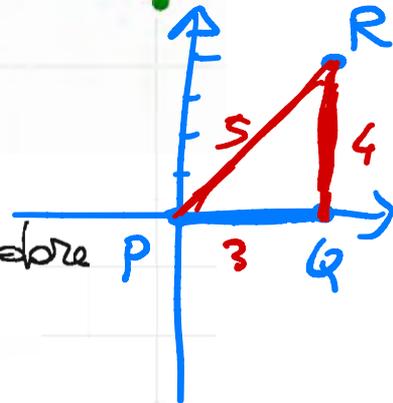
Esercizio dati i tre punti

$$P=(0,0) \quad Q=(3,0) \quad R=(3,4)$$

i) calcolare $d(P,Q)$, $d(P,R)$ e $d(Q,R)$

ii) verificare la disuguaglianza Triangolare

$$d(P,Q) = 3 \quad d(Q,R) = 4 \quad d(P,R) = 5$$



equazione retta passante per $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$ $\stackrel{\text{Def}}{=} \text{Def}$

che la retta esiste unica segue dagli assiomi di Euclide

1° modo per trovare equazione (parametrica)

$$P(t) = (x(t), y(t)) = t \cdot P + (1-t) \cdot Q \quad t \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$(x(t), y(t)) = (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2)$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) = tx_1 + (1-t)x_2 \\ y(t) = ty_1 + (1-t)y_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (*)$$

$(x(t), y(t))$ è il punto che si muove sulla retta, e ammette combinazione lineare di P e Q

eliminando il parametro t

Supponendo $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ si ottiene

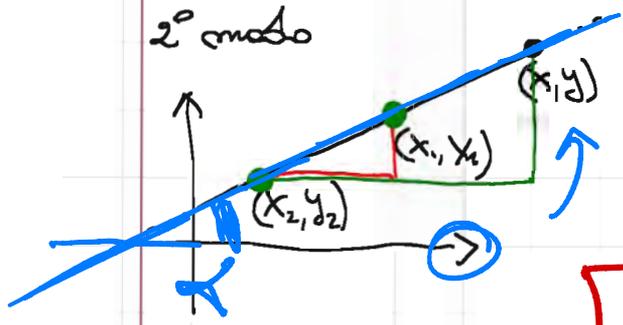
$$\frac{x(t) - x_2}{x_1 - x_2} = t$$

$$\frac{y(t) - y_2}{y_1 - y_2} = t$$

non pare t? perché?

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \quad (**)$$

2° modo



Il triangolo rosso e quello verde sono tra loro simili, e dunque
 $(x-x_2):(x_1-x_2) = (y-y_2):(y_1-y_2)$
 da cui si ricorre

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} (**)$$

N.B. L'espressione (*) della retta per due punti si può scrivere anche se $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, mentre per (**) bisogna fare dei distinguo

N.B. L'espressione (**), quando $t \in [0, 1]$, permette di parametrizzare il segmento P, Q

Esercizio: Calcolare l'equazione della retta

- costante per $P = (-2, -1)$ e $Q = (1, -3)$
- " " $P = (-1, 1)$ e $Q = (1, 2)$
- " " $P = (1, -2)$ e $Q = (2, 2)$
- " " $P = (-2, 1)$ e $Q = (2, 1)$
- " " $P = (2, 3)$ e $Q = (2, 5)$

$$x = 2$$

m : coefficiente angolare di $y = mx + q$ 3

è l'indicatore della "pendenza" di $y = mx + q$

Esempio data $y = -3x + 2$

quando x passa da 2 a 3

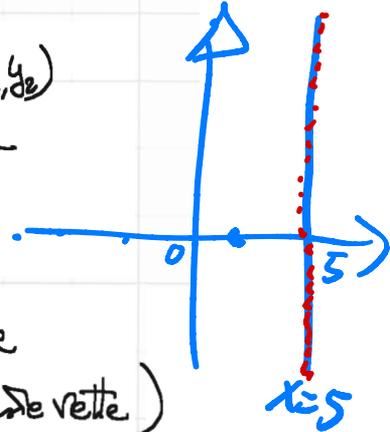
allora y " " -4 a -7

$$y = f(x)$$

N.B. Date la retta per due punti (x_1, y_1) (x_2, y_2)

con $x_1 \neq x_2$, il coefficiente angolare

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



N.B. La retta di equazione $x = 5$ ha coefficiente angolare $m = \pm\infty$ (non è definito per queste rette)

Fascio di rette (proprio) passanti per il punto (\bar{x}, \bar{y}) ?

$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$ al variare di $m \in \mathbb{R}$

a cui devo unire anche la retta $x = \bar{x}$ (corrisponde a $m = \pm\infty$)

Esercizio: Calcolare l'equazione della retta

passante per $P = (1, 2)$ e $Q = (2, 3)$

dim: Il fascio di rette passante per $P = (1, 2)$

ha equazione

$$y - 2 = m(x - 1)$$

tra queste rette voglio quella (l'unica)

passante per $(2, 3)$ ovvero impiego

$$3 - 2 = m(2 - 1) \Rightarrow m = 1$$

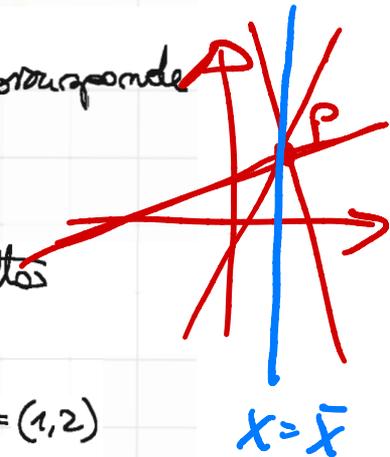
Ne segue che $y - 2 = x - 1$ ovvero

è l'equazione cercata

$$y = x + 1$$

N.B. il coefficiente angolare della retta passante

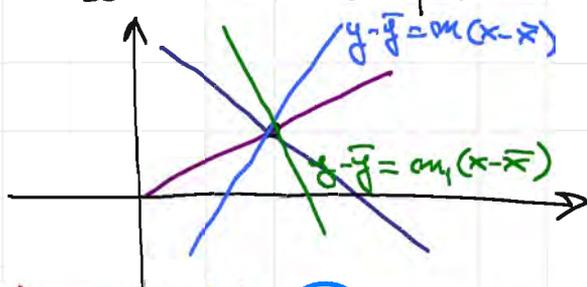
per (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è la tangente dell'angolo α



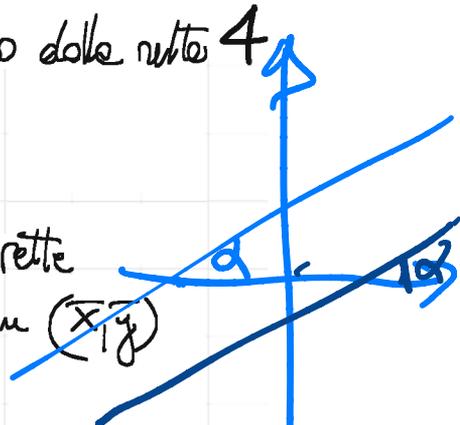
orientato in senso antiorario, formato dalle rette r

con il semipiano positivo $x > 0$.

$$m = \tan \alpha$$



fascio di rette
centro in (\bar{x}, \bar{y})



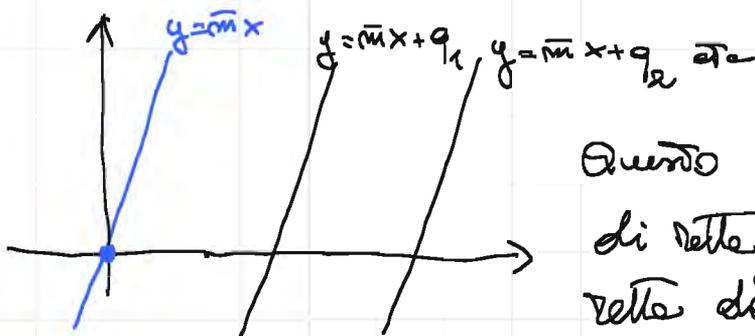
rette parallele \equiv $r: y = mx + q$ e $r': y = m'x + q'$
 sono parallele se $\{(x, y) : y = mx + q\} \cap \{(x, y) : y = m'x + q'\} = \emptyset$
 ovvero se $\begin{cases} y = mx + q \\ y = m'x + q' \end{cases}$ non ha soluzioni

ovvero se $m = m'$ e $q \neq q'$

Serve per distinguere rette parallele da rette coincidenti!

Esempio $r: y = 3x - 1$ $r': y = 3x + 2$ non due rette parallele (= coefficiente angolare ma $q = -1 \neq 2 = q'$)

fascio (improprio) di rette parallele a $y = mx + q \equiv \text{def}$
 è l'insieme delle rette $\{y = m'x + q' : q' \in \mathbb{R}\}$



Questo è un insieme di rette parallele alla retta data.

Esercizio Scrivere l'equazione della retta passante per $(1, 10)$ e // alla retta $y = 2x + 5$
 il punto $(1, 10)$

dim. Il fascio improprio di rette // a r è dato da

$$y = 2x + q \quad q \in \mathbb{R}$$

Impongo che la retta del fascio passi per $(1, 10)$

ed ottengo la condizione $10 = 2 + q \Rightarrow q = 8$

La retta cercata ha equazione $y = 2x + 8$ \square

$r: y = mx + q$ e $r': y = m'x + q'$ sono perpendicolari se 5

$m \cdot m' = -1$

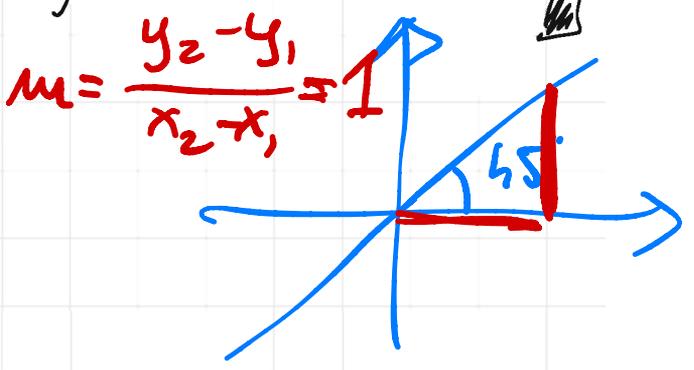
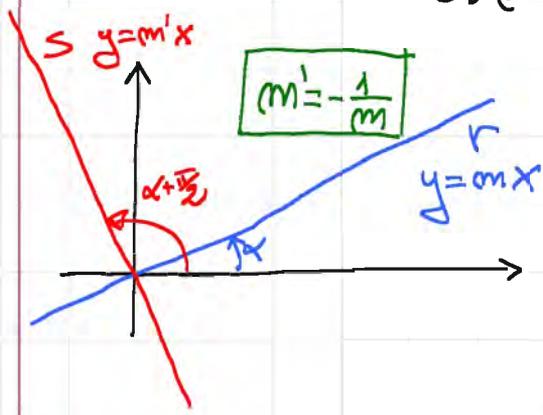
$m = 1 \quad m' = -1$

Osservazione Se r ed s sono perpendicolari, e m ed m' sono i rispettivi coefficienti angolari allora

$\alpha = 45^\circ$

$m = \tan(\alpha)$ mentre $m' = \tan(\alpha + \frac{\pi}{2})$ (formula angolo $\frac{\pi}{2}$)
e dunque

$$m' = \tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sec(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{m}$$



Esercizio data la retta $r: y = 2x$, determinare la retta s passante per $P = (2, 5)$ perpendicolare a r

dim.

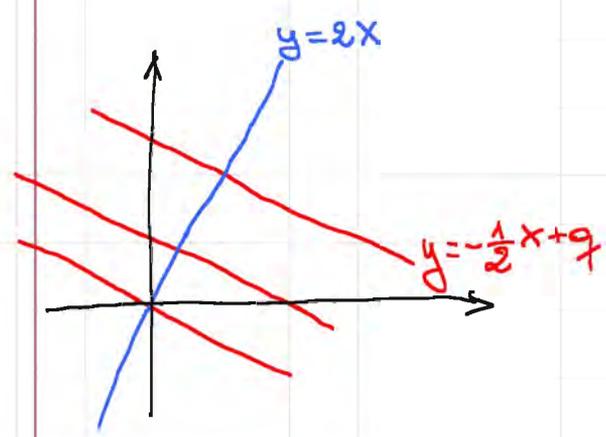
1° modo: prendo il fascio ^{improprio} di rette perpendicolari a r

$$y = -\frac{1}{2}x + q \quad q \in \mathbb{R}$$

e determino quella che passa per P , ovvero

impongo $5 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + q \Rightarrow q = 6$

ovvero $s: y = -\frac{1}{2}x + 6$

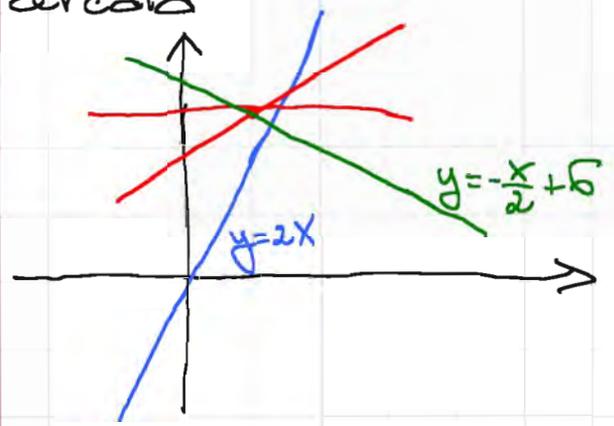


Secondo modo: prendo le rette del fascio

centrato in $m(2,5)$ ovvero $y-5 = m(x-2)$

Impongo ora che $2 \cdot m = -1$ ovvero $m = -\frac{1}{2}$

donque $y = -\frac{x}{2} + 1 + 5$ cioè $y = -\frac{x}{2} + 6$ è la retta cercata



N.B. il punto P , nell'esercizio precedente, non sta sulla retta r , ovvero $P \notin r$.

Osservazione: l'equazione di una retta

si può scrivere anche come segue

$r: ax+by+c=0$

questa equaz. descrive tutte le rette del piano

Una retta parallela a r sarà

$s: ax+by+c'=0$ con $c' \neq c$

Una retta s perpendicolare (\perp) a r sarà

$t: -bx+ay+c''=0$

ovvero

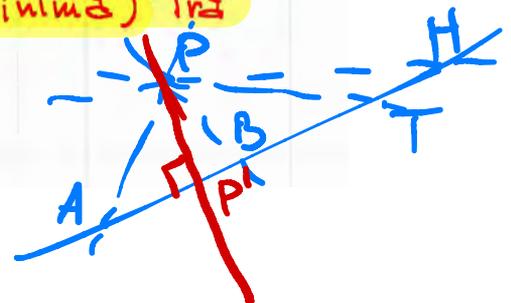
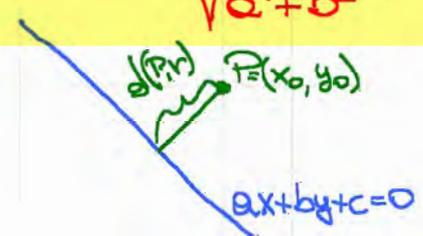
$t: bx-ay-c''=0$

e non ai come vincoli su c'' !

Data una retta $r: ax+by+c=0$ e un punto $P \notin r$

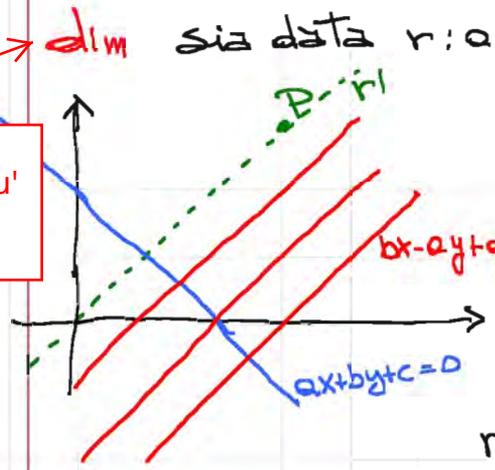
$d(P,r) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

distanza (minima) tra P ed r



per esempio
 $x=5$
 $x-5=0$
 $a=1$
 $b=0$
 $c=-5$

Non e' la dimostrazione piu' veloce, ma e' elementare!



sia data $r: ax+by+c=0$ e $P=(x_0, y_0)$
 Consideriamo $bx-ay+q=0$
 ovvero il fascio di rette \perp a r
 Impongo il passaggio per P
 $bx_0-ay_0+q=0$
 ovvero $q=ay_0-bx_0$ e trovo
 $r': bx-ay+ay_0-bx_0=0$

retta \perp a r passante per P
 Interseca r con r' $\Rightarrow \begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx-ay+ay_0-bx_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abx+b^2y+bc=0 \\ abx-a^2y+a^2y_0-abx_0=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(b^2+a^2)+bc-a^2y_0+abx_0 \\ \bar{y} = \frac{a^2y_0-bc-abx_0}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2x+aby+c=0 \\ b^2x-aby+aby_0-b^2x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a^2+b^2)+ac+aby_0-b^2x_0=0 \\ - \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \frac{b^2x_0-ac-abx_0}{a^2+b^2} \\ \bar{y} = \frac{a^2y_0-bc-abx_0}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$Q=(\bar{x}, \bar{y})$ punto di \cap tra r ed r'

(e' il nostro P')

Adesso $d(P, r) = d(P, Q)$

$$d^2(P, Q) = \frac{1}{(a^2+b^2)^2} \left\{ (b^2x_0-ac-abx_0-a^2x_0-b^2x_0)^2 + (a^2y_0-bc-abx_0-a^2y_0-b^2y_0)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2} \left\{ a^2(ax_0+by_0+c)^2 + b^2(ax_0+by_0+c)^2 \right\}$$

$$= \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2} \Rightarrow d(P, r) = d(P, Q) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Oss ($d(P, r)$ come minimo) $Q=(x, -\frac{a}{b}x-\frac{c}{b})$ e il punto su r
 e $d^2(P, Q) = (x-x_0)^2 + (-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}-y_0)^2 =$
 $= (x-x_0)^2 + \frac{1}{b^2}(by_0+ax+c)^2$
 $= \frac{1}{b^2}(b^2x^2+b^2x_0^2-2b^2xx_0+b^2y_0^2+a^2x^2+c^2+2aby_0x+2bcy_0+2ocx)$

$$\frac{d}{dx}(d^2(P, Q)) = \frac{1}{b^2}(2b^2x-2b^2x_0+2a^2x+2aby_0+2oc) = 0$$

$$x(b^2+a^2) - (b^2x_0 - aby_0 - ac) = 0$$

$$x = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}$$

e quindi, sostituendo ed estraendo la radice, si ha la Terza

ma $P \in r$?
 $r: y = 3x - 5$
 $r = -2$
F
⇓
 $P \notin r$

Esercizio dato la retta $r: y = 3x - 5$ e il punto $P = (1, 2)$, calcolare $d(r, P)$
dove $ax + by + c = 0$

$a = -3$
 $b = 1$
 $c = 5$

r ha equazione $y - 3x + 5 = 0$
mette $P \& r$ (aliter $d(P, r) = 0!$)
e si ha

$$d(P, r) = d(r, P) = \frac{|1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-3 + 2 + 5|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

Circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio R
luogo dei punti (x, y) equidistanti da (x_0, y_0)

$$d((x, y), (x_0, y_0)) = R \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

Osservazione: l'equazione di una circonferenza

- * non contiene termini in xy
- ** i coefficienti dei termini x^2 e y^2 sono $=$
- *** il termine di grado 0 è

$$x_0^2 + y_0^2 - R^2$$

$6x^2$

Esercizio determinare l'equazione della circonferenza centro $(1, 2)$ e raggio 5

dove $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 25 = 0 \implies x^2 + y^2 - 2x - 4y - 30 = 0 \implies (x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$$

Esercizio data l'equazione $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$

- 1- provare che è una circonferenza
- 2- determinare il raggio

completamento del quadrato

dove

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 6y) - 6 = 0 \text{ equivale a}$$

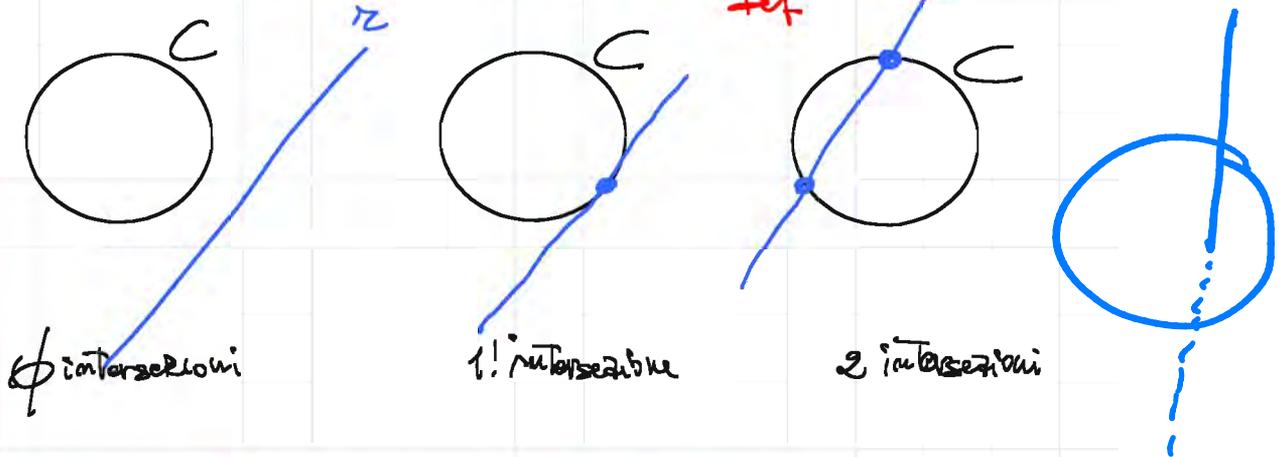
$$C(1; 3)$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) - 6 - 1 - 9 = 0 \text{ equivale a}$$

$$r = 4$$

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$
 ovvero è una circonferenza di centro $(1, 3)$ e raggio 4 9

Intersezione retta-circonferenza \equiv \neq



Cerchio centrato in (x_0, y_0) raggio R

$\{(x, y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2\}$ in questo caso il cerchio contiene anche la circonferenza

Parabola con asse // asse $x \equiv$ $y = ax^2 + bx + c$

Parabola con asse // asse $y \equiv$ $x = Ay^2 + By + C$

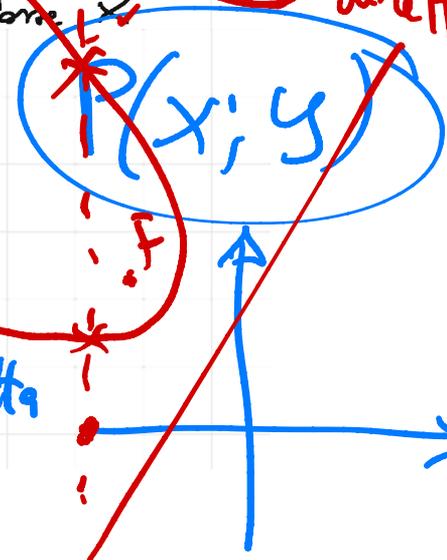
osservazione: la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto FOCO e da una retta fissa detta DIRETTRICE in questo caso è una retta // all'asse x ovvero $F \equiv (p, q)$ e $r: y = k \neq p$

NON ha una di queste equazioni dirett.

$d((x, y); (p, q)) = d((x, y); r)$ ovvero

$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = \frac{|y-k|}{|1|}$ dist. pt-retta

$x^2 + p^2 - 2px + y^2 + q^2 - 2qy = y^2 + k^2 - 2ky$



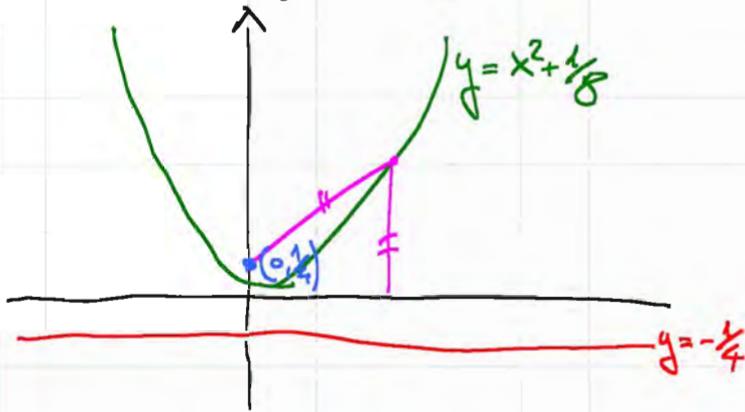
$$x^2 + p^2 - 2px + q^2 - k^2 = y(2q - 2k)$$

10

$$x^2 + p^2 - 2px + \frac{1}{8}$$

ad esempio se $q = \frac{1}{4}$ e $k = -\frac{1}{4}$ e $p = 0$

si trova $y = x^2 + \frac{1}{8}$



asse della parabola \equiv_{Def} data la parabola

$y = ax^2 + bx + c$, diciamo che la retta, parallela all'asse y , che gioca il ruolo di asse di simmetria per il grafico della parabola

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \Leftrightarrow y = a \left[\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a} \right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a} \right]$$

$$\Leftrightarrow y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

e in questo caso l'asse ha equazione

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Vertice della parabola \equiv_{Def} è l'intersezione tra

la parabola e il suo asse, ovvero

$$\begin{cases} y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ x = -\frac{b}{2a} \end{cases} \quad V \equiv \left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

Oss: è l'ascissa del punto di $\begin{cases} \text{minimo assoluto, se } a > 0 \\ \text{massimo assoluto, se } a < 0 \end{cases}$

Esercizio Data la parabola $y = x^2 - 2x + 4$, determinarne l'asse e il vertice 11

dim

$$y = (x^2 - 2x + 1) + 3 \Leftrightarrow y = (x-1)^2 + 3$$

asse: $x=1$

vertice: $\begin{cases} x=1 \\ y=(x-1)^2+3 \end{cases} \hat{=} (1, 3)$ III

Oss: Intersecando una retta con una conica, si ha un sistema di 2° grado e dunque ci si aspetta, in generale, una coppia di soluzioni

retta tangente ad una conica $\hat{=}$ retta che interseca una conica in uno, ed uno solo, punto.

Def: la retta tangente, nel punto di contatto, ha un punto di contatto del **secondo ordine**.

Esercizio Calcolare la tangente in $(\bar{x}, \bar{y}) \in P$ alla parabola $P: y = x^2 + bx + c$

dim la tangente è quella retta che ha 1! intersezione con P in (\bar{x}, \bar{y})

$y = x^2 + bx + c$ interseca la parabola con una delle rette del fascio conico (\bar{x}, \bar{y})

$y = \bar{y} + m(x - \bar{x})$

$$\bar{y} + m(x - \bar{x}) = x^2 + bx + c \Leftrightarrow x^2 + x(b-m) + c + m\bar{x} - \bar{y} = 0$$

ma $\bar{y} = \bar{x}^2 + b\bar{x} + c$, quindi

$$x^2 + x(b-m) + c - (\bar{x}^2 + b\bar{x} + c) + m\bar{x} = 0$$

$$(x^2 - \bar{x}^2) + x(b-m) - \bar{x}(b-m) = 0$$

$$(x - \bar{x}) [x + \bar{x} + b - m] = 0$$

se si vuole che $x = \bar{x}$ sia **soluzione doppia**, è necessario che

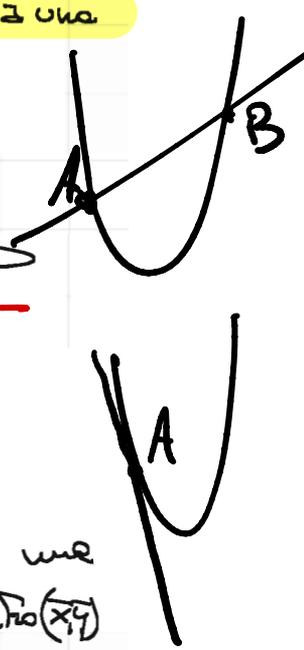
$$2\bar{x} + b - m = 0 \Leftrightarrow m = b + 2\bar{x}$$

ovvero l'eq. della retta $T_{\bar{x}}$ alla parabola in

(\bar{x}, \bar{y}) ha equazione

$$y = \bar{y} + (b + 2\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$
 III

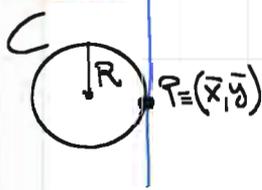
Se volete potete fare questo esercizio anche nel caso piu' generale $y = ax^2 + bx + c$



Esercizio: Calcolare la retta tangente ad una circonferenza $C: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ in un suo punto (\bar{x}, \bar{y})

12

dim



La retta del fascio centrato in (\bar{x}, \bar{y})

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x}). \text{ La interseca con}$$

la circonferenza e impongo di avere

una sola intersezione

$$\begin{cases} y = \bar{y} + m(x - \bar{x}) \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow (x - x_0)^2 + (\bar{y} + m(x - \bar{x}) - y_0)^2 = R^2$$

$$(x - x_0)^2 + [m(x - x_0) - (\bar{x} - x_0) + (\bar{y} - y_0)]^2 = R^2$$

poniamo $\omega = x - x_0$ $\bar{\omega} = \bar{x} - x_0$ $\bar{z} = \bar{y} - y_0$

$$\omega^2 + [m(\omega - \bar{\omega}) + \bar{z}]^2 - R^2 = 0$$

$$\omega^2 + [m^2(\omega^2 + \bar{\omega}^2 - 2\omega\bar{\omega}) + \bar{z}^2 + 2m\omega\bar{z} - 2m\bar{\omega}\bar{z}] - R^2 = 0$$

$$\omega^2 + m^2\omega^2 + m^2\bar{\omega}^2 - 2m^2\omega\bar{\omega} + 2m\omega\bar{z} - 2m\bar{\omega}\bar{z} - \bar{\omega}^2 = 0$$

$$\omega^2(1+m^2) + 2m\omega(\bar{z} - m\bar{\omega}) + m^2\bar{\omega}^2 - 2m\bar{\omega}\bar{z} - \bar{\omega}^2 = 0$$

$$\Delta = m^2(\bar{z}^2 + m^2\bar{\omega}^2 - 2m\bar{\omega}\bar{z}) - m^2\bar{\omega}^2 + 2m\bar{\omega}\bar{z} + \bar{\omega}^2 - m^2\bar{\omega}^2 + 2m^2\bar{\omega}\bar{z} + m^2\bar{\omega}^2 = 0$$

$$= m^2\bar{z}^2 + 2m\bar{\omega}\bar{z} + \bar{\omega}^2$$

$$= (m\bar{z} + \bar{\omega})^2 = 0 \quad \text{per} \quad m = -\frac{\bar{\omega}}{\bar{z}} = -\frac{\bar{x} - x_0}{\bar{y} - y_0}$$

In corrispondenza a questo valore per m

Trovo la retta tangente $y = \bar{y} - \frac{\bar{x} - x_0}{\bar{y} - y_0} (x - \bar{x})$

poiché questa retta ha con la circonferenza

una sola intersezione con molteplicità due

Secondo metodo: la retta che passa per (\bar{x}, \bar{y}) (x_0, y_0)

ha equazione $\frac{\bar{y} - y_0}{y_0 - \bar{y}} = \frac{x - \bar{x}}{x_0 - \bar{x}}$ ovvero $y = \bar{y} + \frac{y_0 - \bar{y}}{x_0 - \bar{x}} (x - \bar{x})$

Questa retta è un diametro, e la retta che passa per (\bar{x}, \bar{y})

ed è \perp al diametro ha equazione

$$y = \bar{y} - \frac{x_0 - \bar{x}}{y_0 - \bar{y}} (x - \bar{x})$$

Questa retta - mi verifica - ha nel punto (\bar{x}, \bar{y})

due intersezioni coincidenti con C

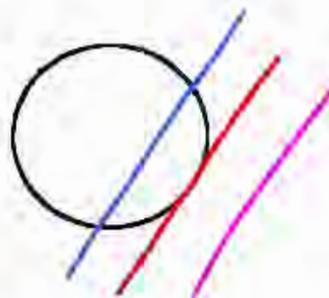
Gli esercizi dal 2.30 al 2.43 sono tutti affrontabili dagli studenti, mentre il 2.44 conviene sia affrontato dal docente

Esercizio 2.44 : trovate i valori di k per cui la retta di equazione $x - y + k = 0$ risulta esterna alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$, quelli per cui è secante, e quelli per cui è tangente; in quest'ultimo caso, determinate le coordinate del punto di tangenza.

dim. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x = y - k \end{cases}$$

le tre situazioni non quelle di figura, ovvero 2, 1 o \emptyset intersezioni



$$(y-k)^2 + y^2 - 2y + 2k = 0 \Leftrightarrow y^2 + k^2 - 2k + y^2 - 2y + 2k = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 2y + k^2 = 0 \quad \text{e ha } y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2k^2}}{2}$$

• dunque

$$1 - 2k^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < k < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2 \text{ soluzioni (secante)}$$

$$1 - 2k^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 \text{ soluzione (tangente)}$$

$$1 - 2k^2 < 0 \Leftrightarrow |k| > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \emptyset \text{ soluzioni (esterna)}$$

