3° INCONTRO

GEOMETRIA ANALITICA

Spazio $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : \ x, y \in \ \mathbb{R}\}$$

Distanza tra due punti

Punti: P=(x,y) e Q=(z,w) $\in \mathbb{R}$

d: $\mathbb{R}^2$ x $\mathbb{R}^2$ --------> $[0, +\infty[$ è così definita

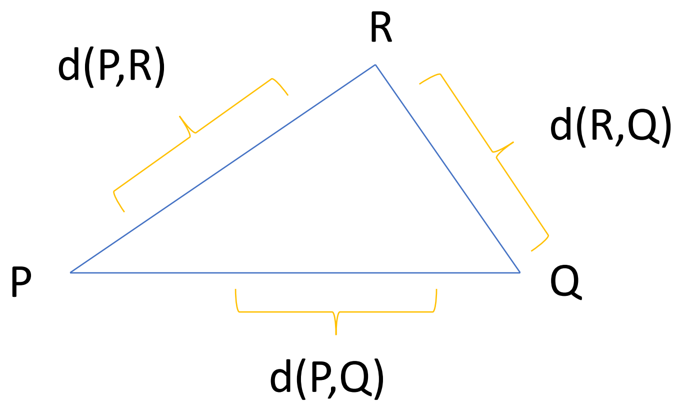
$$\mathbf{d(P,Q)} = \sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^2 + (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{w})^2}$$

i) d(P,Q) $\geq$ 0 $\forall$ P,Q ; d (P,Q) = 0 se P=Q

ii) d(P,Q) $=$ d(Q,P) $\forall$ P,Q

iii) d(P,Q) $\leq$ *d(P,R) + d(R,Q)* $\forall$ *P,Q,R*

Disuguaglianza triangolare



Esercizio

Dati i tre punti:

P=(0,0)

Q=(3,0)

R=(3,4)

i) Calcolare d(P,Q), d(P,R) e d(Q,R)
ii) Verificare la disuguaglianza triangolare

Equazione di una retta

Equazione di una retta passante per P=(x_1, y_1) e Q=(x_2, y_2) $\equiv_{Def}$

Che la retta esista e sia unica segue dagli assiomi di Euclide

1° modo per trovare equazione (parametrico):

P(t)=(x(t), y(t)) = tP + (1-t)Q $t \in \mathbb{R}$

Ovvero:

(x(t), y(t)) = (tx_1, ty_1) + ((1-t)x_2 , (1-t) y_2)

Ovvero:

$$\begin{cases} x(t) = tx_1 + (1-t)\,x_2 & t \in \mathbb{R} \\ y(t) = ty_1 + (1-t)\,y_2 \end{cases}$$

* (x(t), y(t)) è il punto che si mette sulla retta, è uscita combinazione di P e Q

Supponendo $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ si ottiene

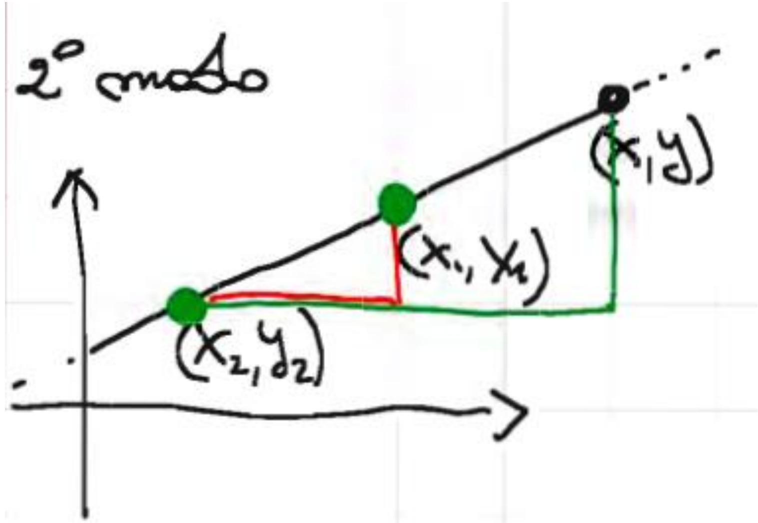
$$\begin{cases} \dfrac{x(t) - x_2}{x_1 - x_2} = t \\[2ex] \dfrac{y(t) - y_2}{y_1 - y_2} = t \end{cases} \rightarrow \quad \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \qquad (**)$$

scompare t? perché?

2° modo:

Il triangolo rosso e quello verde sono tra loro simili, e quindi $(x - x_2):(x_1 - x_2) = (y - y_2):(y_1 - y_2)$ da cui si ricava:

$$\boxed{\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}} \quad (**)$$



- N.B. L’espressione (*) della retta passante per due punti si può scrivere anche se $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, mentre per (**) bisogna fare dei distinguo. Ovvero?

Esercizio

Calcolare l’equazione della retta:

- Passante per P = (-2, -1) e Q = (1, -3)
- Passante per P = (-1, -1) e Q = (1, -2)
- Passante per P = (1, -2) e Q = (2, 2)
- Passante per P = (-2, 1) e Q = (2, 1)
- Passante per P = (2, 3) e Q = (2, 5)

Coefficiente angolare

m: coefficiente angolare di y = mx + q
è l'indicatore della «pendenza» di y = mx + q

Esempio: data y = -3x + 2
quando x passa da 2 a 3
allora y passa da -4 a -7

N.B.: data la retta passante per due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$, il coefficiente angolare

$$\boxed{\mathbf{m} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

N.B.: la retta di equazione x = 5 ha coefficiente angolare m = $\pm\infty$ (non è definito per queste rette)

Fascio di rette

Fascio di rette (proprio) passanti per il punto $(\overline{x}, \overline{y})$?

$\boxed{y - \overline{y} = m\,(x - \overline{x})}$ al variare di $m \in \mathbb{R}$

A cui devo unire anche la retta $x = \overline{x}$
(corrisponde a $m = \pm\infty$)

Esercizio

Calcolare l'equazione della retta passante per P=(1,2) e Q=(2,3)

Dimostrazione:

Il fascio di rette passante per P = (1,2) ha equazione:

$y - 2 = m (x -1)$

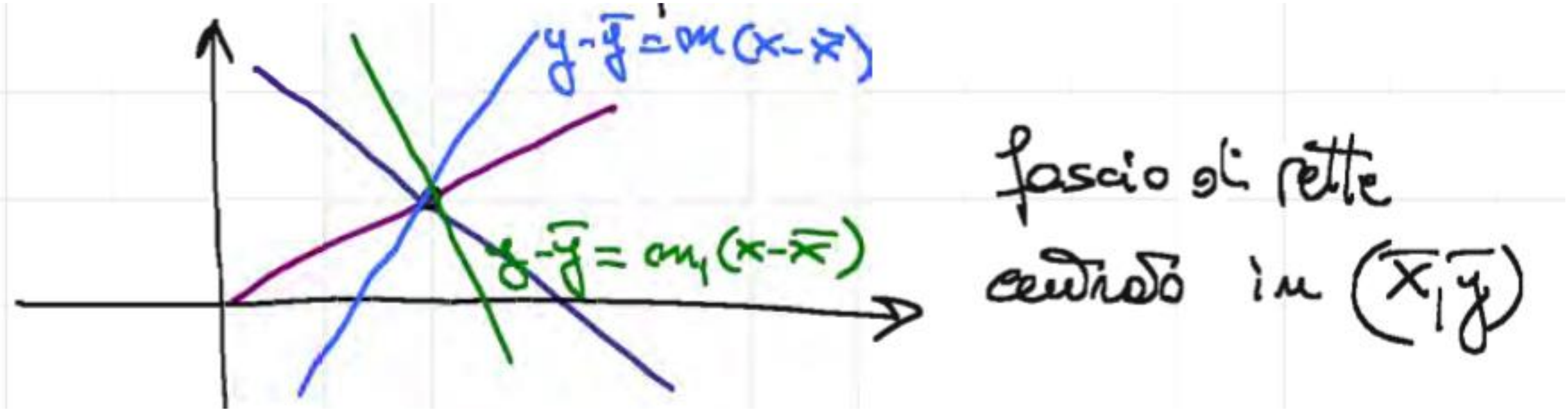
Tra queste rette voglio quella (l'unica) passante per (2,3), ovvero impongo:

$3 - 2 = m (2 - 1) \rightarrow m = 1$

Ne segue che $y - 2 = x - 1$

Ovvero $y = x + 1$ → è l'equazione cercata

N.B.: il coefficiente angolare della retta passante per (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è la tangente dell'angolo α orientato in senso antiorario, formato dalla retta r con il semiasse positivo $x > 0$.



Rette Parallele

Rette parallele $\equiv_{Def}$ r: y = mx + q e r': y = m'x + q'

sono parallele se:

$\{ (x,y) : y=mx+q \} \cap \{ (x,y)=m'x+q' \} = \emptyset$

Ovvero se:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = m'x + q' \end{cases}$$ non ha soluzioni

Ovvero se: $\boxed{m=m' \quad e\ q\neq q}$ (serve per distinguere rette parallele con rette coincidenti)

Esempio

$$r: \quad y = 3x - 1$$

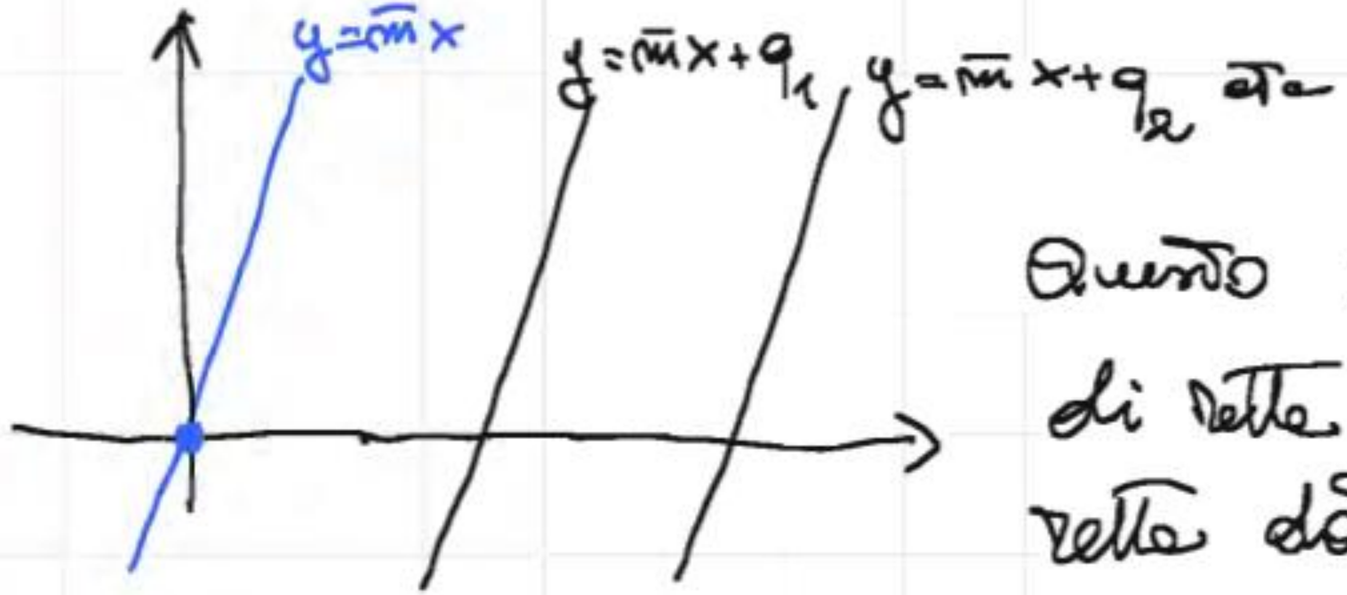
$$r': \quad y = 3x + 2$$

Sono rette parallele

(coefficiente angolare uguale ma $q = -1 \neq q' = 2$)

Fascio di rette parallele

Fascio (improprio) di rette parallele a y = mx + q $\equiv_{Def}$
è l'insieme delle rette $\{\, y = \overline{m}\, x + q : \ q \in \mathbb{R} \,\}$



Questo è un insieme
di rette parallele alla
retta data.

Esercizio

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto (1, 10) e parallela alla retta $y = 2x + 5$

Soluzione:

Il fascio improprio di rette parallele a r è dato da

$y = 2x + q : \; q \in \mathbb{R}$

Impongo che la retta del fascio passi per (1,10) ed ottengo la condizione: $10 = 2 + q \rightarrow q = 8$

La retta cercata ha equazione: $y = 2x + 8$

Rette perpendicolari

r: y = mx + q e r’: y=m’x + q’ sono perpendicolari se

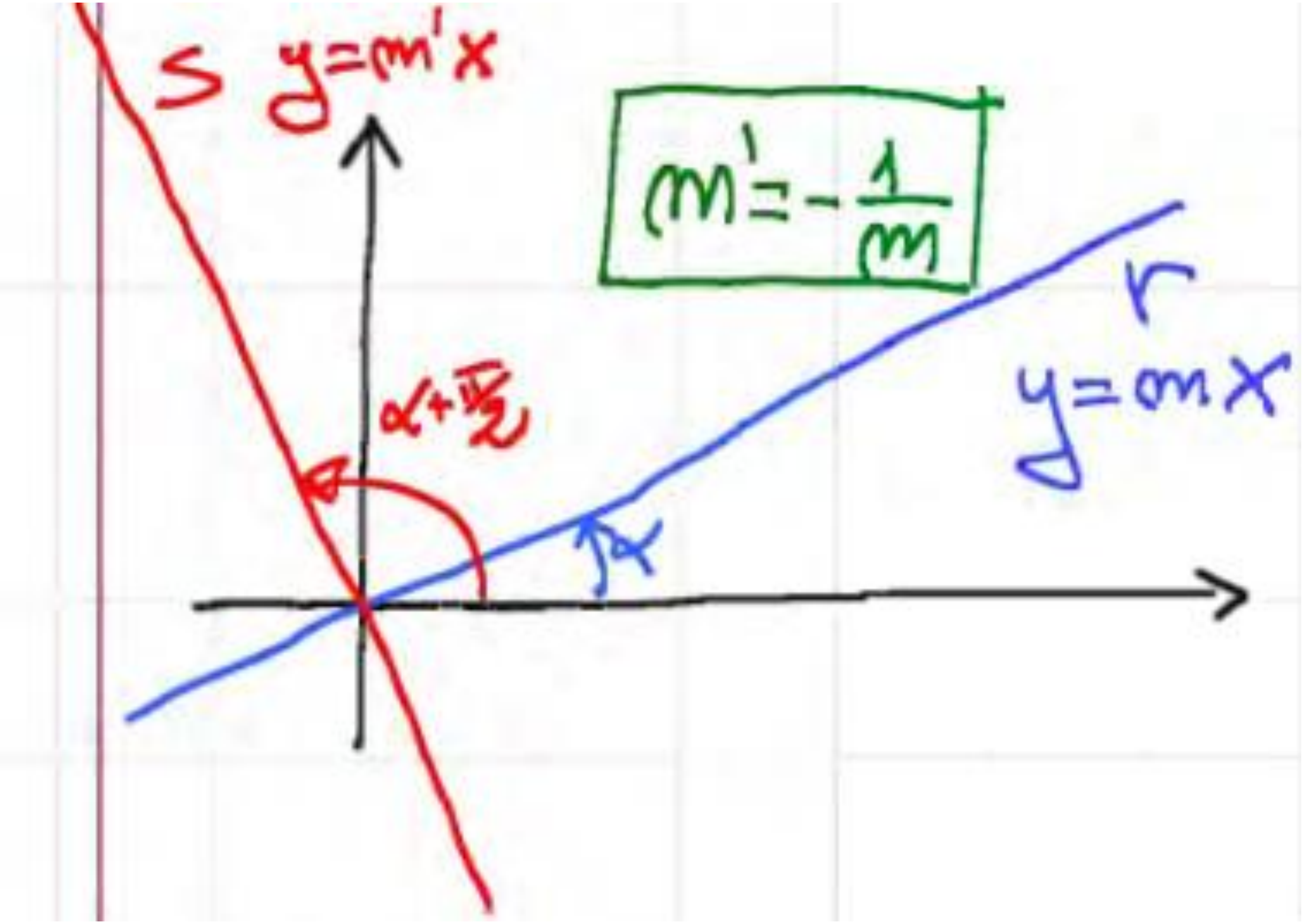
$$\boxed{m \cdot m' = -1}$$

Osservazione: se r ed s sono perpendicolari, e m ed m’ sono i rispettivi coefficienti angolari allora:

m = tg(α) mentre m’=tg($\alpha+\frac{\pi}{2}$) (formano angolo $\frac{\pi}{2}$) e dunque:

$$m' = tg\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{sen\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\alpha}{-sen\alpha} = -\frac{1}{tg(\alpha)} = -\frac{1}{m}$$

Rette perpendicolari



Esercizio

Data la retta r: $y = 2x$, determinare la retta s passante per $P = (2,5)$ perpendicolare a r

Soluzione:

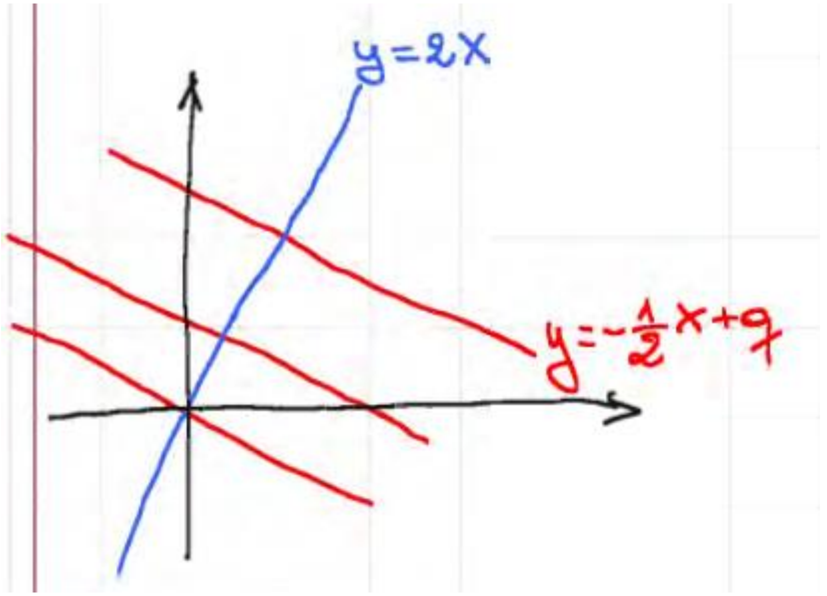
1° modo: prendo il fascio improprio di rette perpendicolari a r

$y = (-\frac{1}{2}) \cdot x + q \ : \ q \in \mathbb{R}$

e determino quella che passa per P,

ovvero impongo

$5 = (-\frac{1}{2}) \cdot 2 + q \rightarrow q = 6$



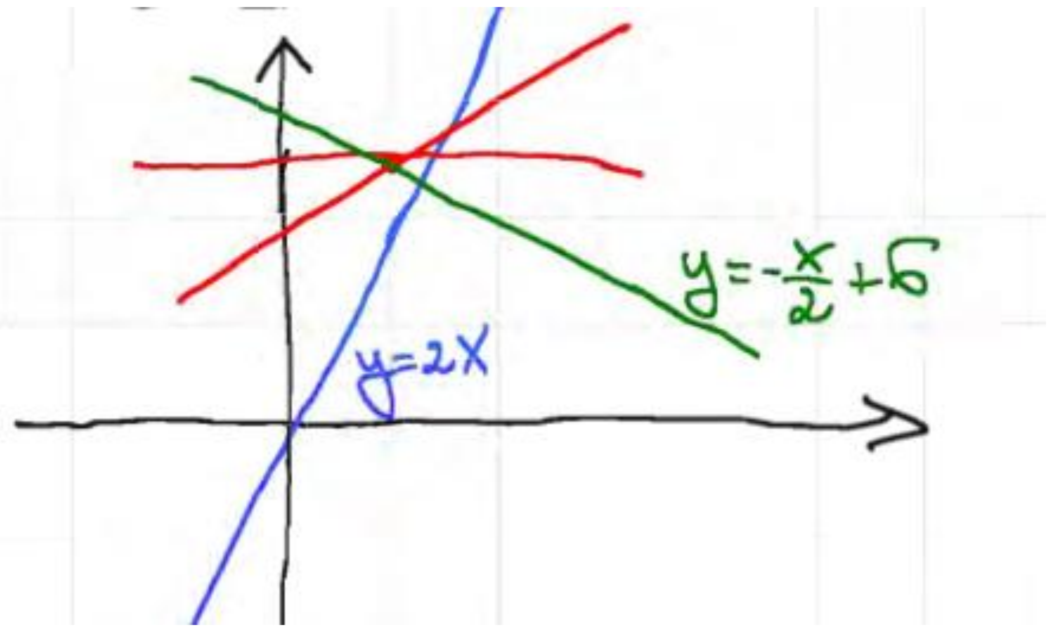
Ovvero s: $y = -\frac{1}{2} x + 6$

Esercizio

Soluzione:
2° modo: prendo le rette del fascio centrato in (2, 5) ovvero
$y - 5 = m (x - 2)$

Impongo ora che
$2 \cdot m = -1$ ovvero $m = - \frac{1}{2}$

Dunque $y = - \frac{x}{2} + 1 + 5$ cioè
$y = = - \frac{x}{2} + 6$ è la retta cercata



N.B.: il punto P nell'esercizio precedente, non sta sulla retta r, ovvero $P \notin r$

Osservazione

L’equazione di una retta si può scrivere anche come segue:

$$\boxed{r: ax + by + c = 0}$$

Una retta parallela a r sarà:

$s: ax + by + c' = 0$ con $c' \neq c$

Una retta t perpendicolare a r sarà:

$t: -bx + ay + c'' = 0$ ovvero $t: bx - ay - c'' = 0$

e non ci sono vincoli su c''

Distanza tra un punto e una retta

Data una retta r: $ax + by + c = 0$ e un punto $P \notin r$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|\,ax_0+by_0+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$ distanza minima tra P ed r

Dimostrazione:

Sia data r: ax + by + c = 0 e P (x_0, y_0)

consideriamo bx – ay + q = 0, ovvero il fascio di rette parallele a r.

Impongo il passaggio per P:

bx_0 - ay_0 + q = 0   ovvero   q = ay_0 - bx_0 e trovo

r': bx – ay + ay_0 - bx_0 = 0

Interseco r con r':

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} abx + b^2y + bc = 0 \\ abx - a^2y + a^2y_0 - abx_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} abx + b^2y + bc = 0 \\ y\,(b^2 + a^2) + bc - a^2y_0 + abx_0 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{y} = \frac{\mathrm{a}^2 y_0 - \mathrm{bc} - \mathrm{ab} x_0}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$$

$$\begin{cases} a^2x + aby + ac = 0 \\ b^2x - aby_0 - b^2x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(a^2 + b^2) + ac + aby_0 - b^2x_0 = 0 \\ b^2x - aby_0 - b^2x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{b^2 x_0 - ac - aby_0}{a^2+b^2} \\ \bar{y} = \dfrac{a^2 y_0 - bc - abx_0}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Q = ($\bar{x}$, $\bar{y}$), punto di ∩ tra r ed r’

Adesso d (P,r) = d (P,Q)

d^2 (P,Q) = $\frac{1}{(a^2+b^2)^2}$ * $\{ (\cancel{b^2 x_0} - ac - aby_0 - a^2 x_0 - \cancel{b^2 x_0})^2 + (\cancel{a^2 y_0} - bc - abx_0 - \cancel{a^2 y_0} - b^2 y_0)^2 \}$

$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2} * \{a^2 (ax_0 + by_0 + c)^2 + b^2 (ax_0 + by_0 + c)^2 \}$$

$$= \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)} \rightarrow \quad d(P,r) = d(P,Q) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Osservazione (d(P,r) come minimo):

$Q = (x, -\frac{a}{b} x - \frac{c}{d})$ è il punto su r

e $d^2(P,Q) = (x-x_0)^2 + (-\frac{a}{b} x - \frac{c}{d} - y_0)^2 =$

$= (x-x_0)^2 + \frac{1}{b^2} (by_0 + ax + c) =$

$= \frac{1}{b^2} (b^2x^2 + b^2x_0^2 - 2b^2xx_0 + b^2y_0^2 + a^2x^2 + c^2 + 2aby_0x + 2bcy_0 + 2acx)$

$$\frac{d}{dx}\left(d^2(P,Q)\right) = \frac{1}{b^2}\left(b^2x - 2b^2x_0 + 2a^2x + 2aby_0 + 2ac\right) = 0$$

$$x\,(b^2 + a^2) - (b^2x_0 - aby_0 - ac) = 0$$

$$x = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}$$

e quindi, sostituendo ed estraendo la radice, si ha la tesi

Esercizio

Data la retta r: $y = 3x - 5$ e il punto $P = (1,2)$ calcolare $d(r,P)$

Svolgimento:

r ha equazione $y-3x+5=0$

Inoltre $P \notin r$ (altrimenti $d(P,r)=0$) e si ha:

$$d(P,r) = d(r,P) = \frac{|1-3*1+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Attenzione: razionalizzare!

Circonferenza

Circonferenza di centro (x_0,y_0) e raggio R $\equiv_{Def}$
luogo dei punti (x,y) equidistanti da (x_0,y_0)

$$d((x,y),(x_0,y_0)) = R \iff \boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2}$$

Osservazione: l'equazione di una circonferenza:
- non contiene termini in xy
- i coefficienti dei termini x^2 e y^2 sono uguali
- il termine di grado 0 è $x_0^2+y_0^2-R^2$

Esercizio

Determinare l'equazione della circonferenza centro (1,2) e raggio 5

Soluzione:

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

$x^2+y^2-2x-4y+(1+4-25)=0$

Esercizio

Data l'equazione $x^2+y^2-2x-6y-6=0$

- provare che è una circonferenza
- determinarne il raggio

Soluzione:

$(x^2-2)+(y^2-6y)-6=0$ equivale a

$(x^2-2x+1)+(y^2-6y+9)-6-1-9=0$ equivale a

$(x-1)^2+(y-3)^2=16$

ovvero è una circonferenza di centro (1,3) e raggio 4

Intersezione retta-circonferenza

Cerchio

Cerchio centrato in (x0,y0) raggio R $\equiv_{Def}$

$$\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \ \leq R^2 \ \}$$

In questo caso il cerchio contiene anche la circonferenza

Parabola

Parabola con asse parallelo all'asse y $\equiv_{Def}$

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Parabola con asse parallelo all'asse x $\equiv_{Def}$

$$x = Ay^2 + By + C$$

Osservazione: la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto Fuoco e da una retta fissa detta Direttrice, che in questo caso è una retta parallela all'asse x, ovvero $P=(p,q)$ e $r: y = k \neq p$

$d((x,y);(p,q))=d((x,y);r)$ ovvero

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2} = \frac{|y-k|}{|1|}$$

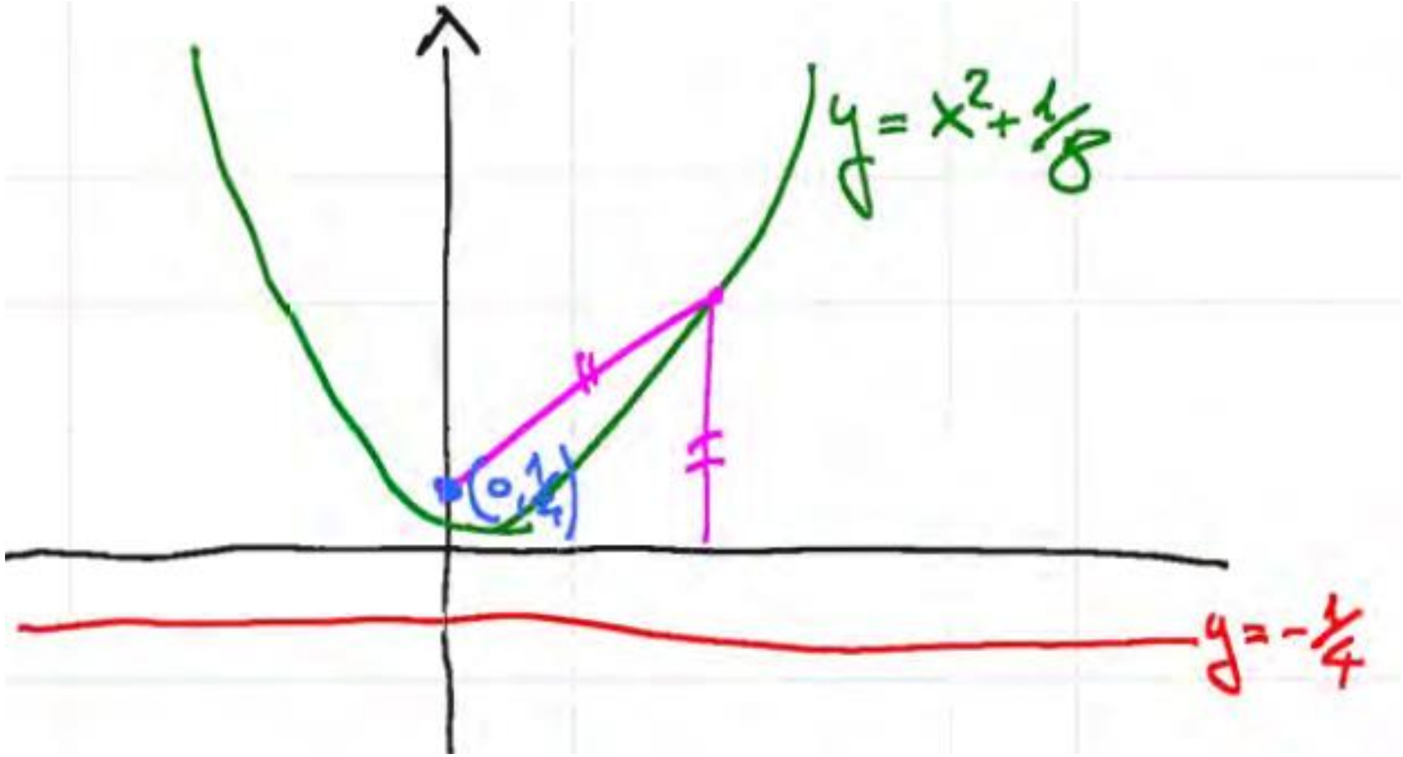
$$x^2 + p^2 - 2px + \cancel{y^2} + q^2 - 2qy = \cancel{y^2} + k^2 - 2ky$$

$$x^2 + p^2 - 2px + q^2 - k^2 = y\,(2q - 2k)$$

Ad esempio, se $q = \frac{1}{4}$

e $k = -\frac{1}{4}$ e $p = 0$

si trova $y = x^2 + \dfrac{1}{8}$



Asse della parabola

Asse della parabola $\equiv_{Def}$
data la parabola $y = ax^2 + bx + c$, diciamo asse la retta, parallela all'asse y, che gioca il ruolo di asse di simmetria per il grafico della parabola

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \rightarrow y = a\left[\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}\right]$$

$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$ e in questo caso l'asse ha equazione

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$$

Vertice della parabola

Vertice della parabola $\equiv_{Def}$

è l’intersezione tra la parabola e il suo asse, ovvero:

$$\begin{cases} y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \\ x = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

$$\boxed{V = \left(-\frac{b}{2a} ; c - \frac{b^2}{4} \right)}$$

Osservazione: è l’ascissa del punto di minimo assoluto se a > 0, è l’ascissa del punto di massimo assoluto se a < 0

Esercizio

Data la parabola $y = x^2 - 2x + 4$ determinarne l'asse e il vertice

Svolgimento:

$y = (x^2 - 2x + 1) + 3 \rightarrow y = (x-1)^2 + 3$

asse: $x=1$; Vertice: $\begin{cases} x = 1 \\ y = (x-1)^2 + 3 \end{cases}$ $V = (1,3)$

Osservazione: intersecando una retta con una conica, si ha un sistema di 2° grado e dunque ci si aspetta, in generale, una coppia di soluzioni

Tangenza con parabola

Retta tangente ad una conica $\equiv_{Def}$
retta che interseca una conica in uno, ed un solo, punto.

Osservazione: la retta tangente, nel punto di contatto, ha un punto di contatto del secondo ordine

Esercizio

Calcolare la tangente in $(\bar{x},\bar{y}) \in$ P
alla parabola P : $y = x^2 + bx + c$

Soluzione: la tangente è quella retta che ha intersezione con P in $(\bar{x},\bar{y})$

$$\begin{cases} y = x2 + bx + c \\ y = \bar{y} + m\,(x - \bar{x}) \end{cases}$$

Interseca la parabola con una delle rette del fascio centro $(\bar{x},\bar{y})$

$\bar{y}$ + mx - m$\bar{x}$ = x^2 + bx + c (=) x^2 + x(b-m) + c + m$\bar{x}$ - $\bar{y}$ = 0

ma $\bar{y}$ = $\bar{x}^2$ + bx + c, quindi

$x^2 + x\,(b-m) + \cancel{c} - (\bar{x}^2 + b\bar{x} + \cancel{c}) + m\bar{x} = 0$

$(x^2 - \bar{x}^2) + x\,(b-m) - \bar{x}\,(b-m) = 0$

$(x - \bar{x}\,)\,[\,x + \bar{x} + b - m\,] = 0$

se si vuole che x = $\bar{x}$ sia soluzione doppia, è necessario che:

$2\bar{x} + b - m = 0 \quad \leftrightarrow \quad m = b + 2\bar{x}$

ovvero l'equazione della retta tangente alla parabola in ($\bar{x}$,$\bar{y}$) ha equazione: $y = \bar{y} + (b + 2\bar{x}\,)\,(x - \bar{x}\,)$

Esercizio

Calcolare la retta tangente ad una circonferenza
C: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ in un suo punto $(\bar{x},\bar{y})$

Svolgimento:
La retta del fascio centrato in $(\bar{x},\bar{y})$ è $y - \bar{y} = m\,(x - \bar{x})$
La interseco con la circonferenza e impongo di avere una sola intersezione

$$\begin{cases} y = \bar{y} + m\,(x - \bar{x}) \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

$(x-x_0)^2 + (\bar{y} + m\ (x - \bar{x}) - y_0)^2 = R^2$

$(x-x_0)^2 + [\ m\ ((x-x_0)-(\bar{x}-x_0)) + (\bar{y} - y_0)\ ]^2 = R^2$

Poniamo $w = x-x_0$, $\bar{w} = \bar{x}-x_0$, $\bar{z} = \bar{y}-y_0$

$w^2 + [\ m\ (w-\bar{w}) + \bar{z}\ ]^2 - R^2 = 0$

$w^2 + [\ m^2\ (w^2-\bar{w}^2-2w\bar{w}) + \bar{z}^2 + 2mw\bar{z} - 2m\bar{w}\bar{z}\ ] - R^2 = 0$

$w^2 + m^2w^2 + m^2\bar{w}^2 - 2m^2w\bar{w} + 2mw\bar{z} - 2m\bar{w}\bar{z} - \bar{w}^2 = 0$

$w^2(1+m^2) + 2mw(\bar{z} - m\bar{w}) + m^2\bar{w}^2 - 2m\bar{w}\bar{z} - \bar{w}^2 = 0$

$$\Delta = m^2 (\bar{z}^2 + \cancel{m^2\bar{w}^2} - \cancel{2m\bar{w}\bar{z}}) - \cancel{m^2\bar{w}^2} + 2m\bar{w}\bar{z} + \bar{w}^2 - m^4\bar{w}^2 + \cancel{2m^3\bar{w}\bar{z}} \cancel{+} m^2\bar{w}^2 = 0$$

$$= m^2\bar{z}^2 + 2m\bar{w}\bar{z} + \bar{w}^2$$

$=(m\bar{z} + \bar{w})^2 = 0$ se $\bar{m} = -\frac{\bar{w}}{\bar{z}} = -\frac{\bar{x}-x_0}{\bar{y}-y_0}$

In corrispondenza a questo valore per $\bar{m}$ trovo la retta tangente $y = \bar{y} - \frac{\bar{x}-x_0}{\bar{y}-y_0}(x - \bar{x})$ poiché questa retta ha con la circonferenza una sola intersezione con molteplicità due.

Secondo metodo:

La retta che passa per $(\bar{x},\bar{y})$ (x_0,y_0)
ha equazione $\frac{y-\bar{y}}{y_0-\bar{y}} = \frac{x-\bar{x}}{x_0-\bar{x}}$ ovvero $y = \bar{y} + \frac{y_0-\bar{y}}{x_0-\bar{x}}(x-\bar{x})$

Questa retta è un diametro, e la retta che passa per $(\bar{x},\bar{y})$ ed è perpendicolare al diametro ha equazione
$y = \bar{y} - \frac{x_0-\bar{x}}{y_0-\bar{y}}(x-\bar{x})$

Questa retta – si verifica – ha nel punto $(\bar{x},\bar{y})$ due intersezioni coincidenti con C.

Esercizio 2.44

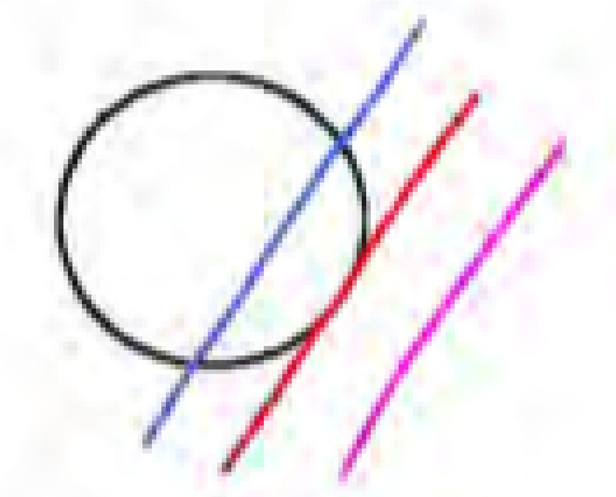
Trovare i valori di k per cui la retta di equazione $x – y + k = 0$ risulta esterna alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 – 2x = 0$, quelli per cui è secante e quelli per cui è tangente; in questo ultimo caso, determinare le coordinate del punto di tangenza.

Svolgimento:

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x = y - k \end{cases}$$

Le tre situazioni richieste sono quelle della figura, ovvero 2, 1 o 0 Intersezioni



$(y-k)^2 + y^2 - 2y + 2k = 0 \quad \leftrightarrow \quad y^2 + k^2 - ak + y^2 - 2y + 2k = 0$

$2y^2 - 2y + k^2 = 0$ e si ha $y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-2k^2}}{2}$

Dunque:

$1 - 2k^2 > 0$ ⟷ $-\frac{1}{\sqrt{2}} < k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ⟷ 2 soluzioni (secante)

$1 - 2k^2 > 0$ ⟷ $k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 1 soluzione (tangente)

$1 - 2k^2 < 0$ ⟷ $|k| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 0 soluzione (esterna)