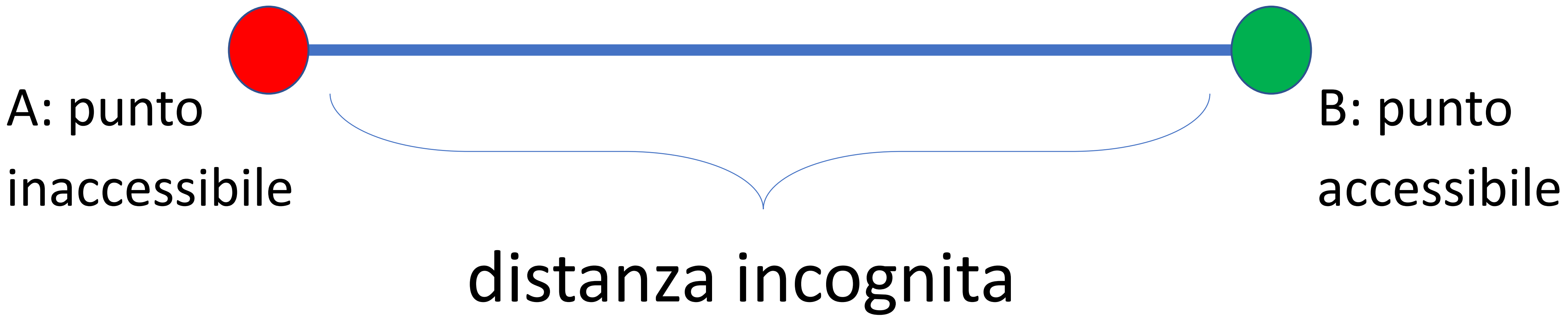
5°-6° INCONTRO

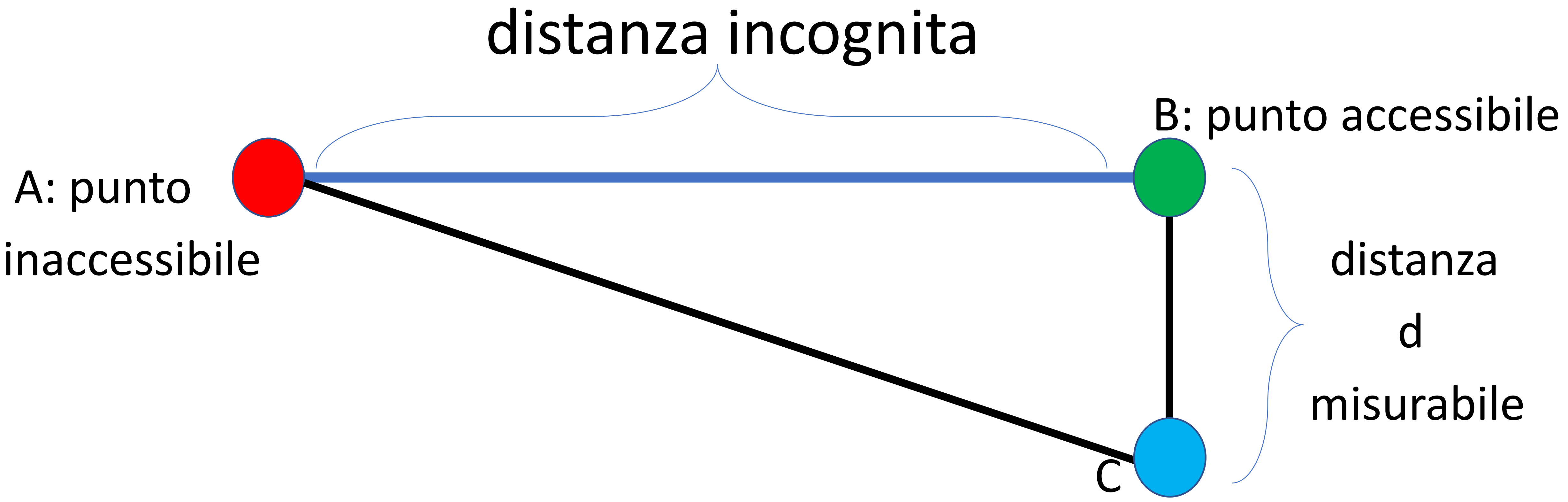
TRIGONOMETRIA

Problema

Come calcolare la distanza di un oggetto inaccessibile a partire da una posizione accessibile?



1° passo: introduco un secondo punto accessibile C



E poi misuro tre quantità relative al triangolo ABC:

- la distanza d (B,C);
- L'angolo A$\hat{B}$C
- L'angolo B$\hat{C}$A

Noti questi valori, posso calcolare $\mathrm{C}\hat{A}\mathrm{B} = \pi - \mathrm{A}\hat{B}C$ - $\mathrm{B}\hat{C}A$ e posso calcolare d (A,B) che desideravo calcolare (si osservi che se ho l'accortezza d prendere BC perpendicolare ad AB, allora:

$$d(A,B) = d(B,C) \cdot \mathrm{tg}\ (\mathrm{C}\hat{A}\mathrm{B})$$

Naturalmente questo è solo un piccolo esempio pratico: è possibile calcolare la distanza tra due punti inaccessibili (dovremo introdurre due punti accessibili, etc.).

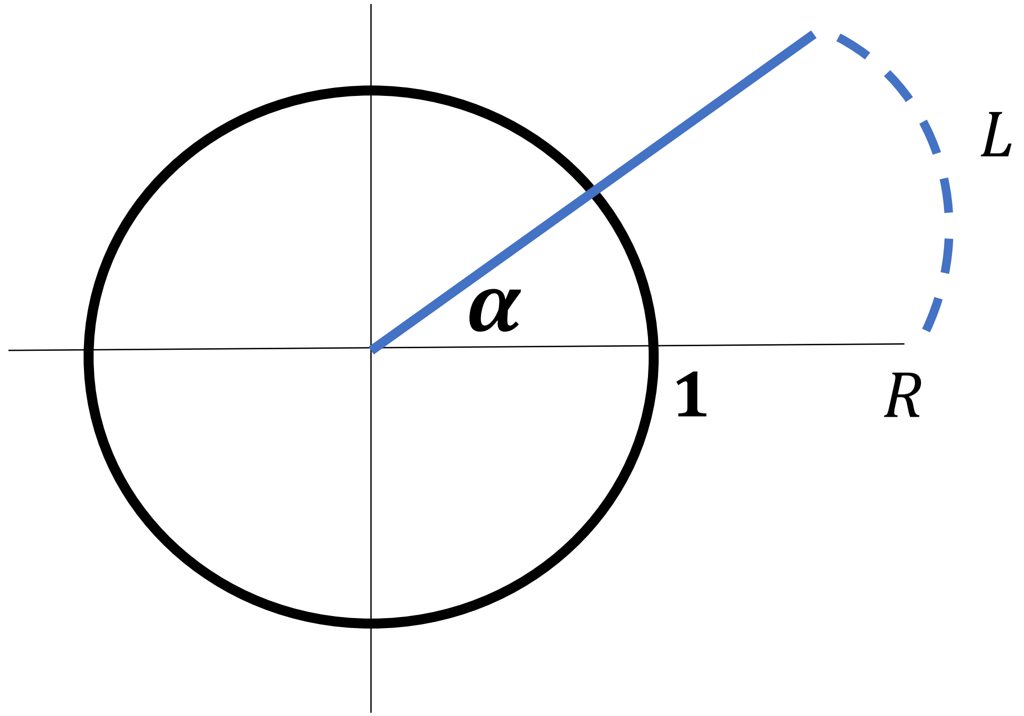
Se, ad esempio, volessi calcolare la distanza tra la terra e la luna potrei procedere come sopra.

Con un poco di trigonometria Eratostene calcolò la misura della circonferenza terrestre.

L'obiettivo della trigonometria è la risoluzione dei triangoli, e procede associando ad ogni angolo α due quantità, senα e cosα

Primo passo: gli angoli sono espressi in radianti

Dato un angolo $\boldsymbol{\alpha}$, fissato un raggio R, si tracci la porzione di circonferenza di raggio R sottesa da questo angolo, sia L.



L/R è il valore in radianti di $\boldsymbol{\alpha}$. In particolare, quando R=1, il valore in radianti dell’angolo è la lunghezza. Ne segue che vale la seguente corrispondenza:

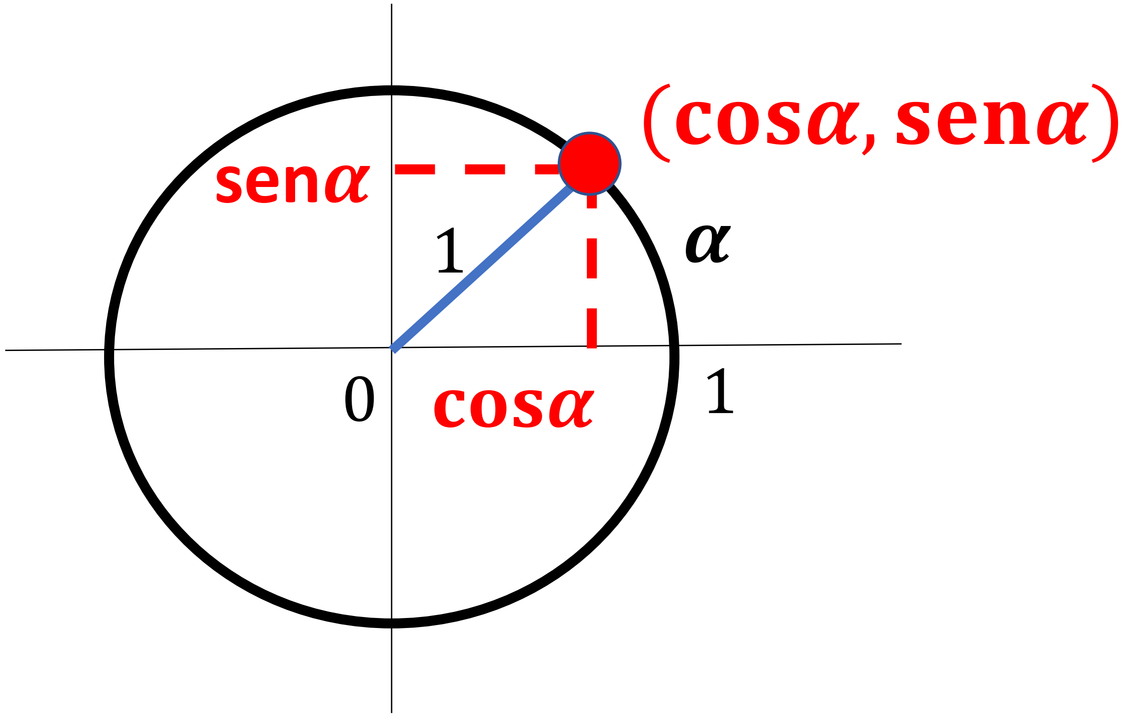
Gradi	Radianti	Gradi	Radianti
30°	$\pi/6$	210°	$7/6\pi$
45°	$\pi/4$	225°	$5/4\pi$
60°	$\pi/3$	240°	$4/3\pi$
90°	$\pi/2$	270°	$3/2\pi$
120°	$2/3\pi$	300°	$5/3\pi$
135°	$3/4\pi$	315°	$7/4\pi$
150°	$5/6\pi$	340°	$11/6\pi$
180°	π	360°	2π

Passare da gradi a radianti e viceversa

sen(x) e cos(x)

Preso il punto sulla circonferenza trigonometrica (raggio 1 centrata nell'origine) corrispondente all'angolo $\boldsymbol{\alpha}$ (ovvero quando si è percorso un tratto di lunghezza $\boldsymbol{\alpha}$ sulla circonferenza), questo punto ha come coordinate:

(x,y) = (cosα, senα)



In tal modo si scopre che (si esamini il triangolo rettangolo di cateti cos$\boldsymbol{\alpha}$ e sen$\boldsymbol{\alpha}$e diagonale 1):

$$\boxed{\mathbf{sen}^2\alpha + \mathbf{cos}^2\alpha = \mathbf{1} \quad \forall\boldsymbol{\alpha}}$$

per il teorema di Pitagora

Calcolo di senx e cosx per alcuni angoli noti

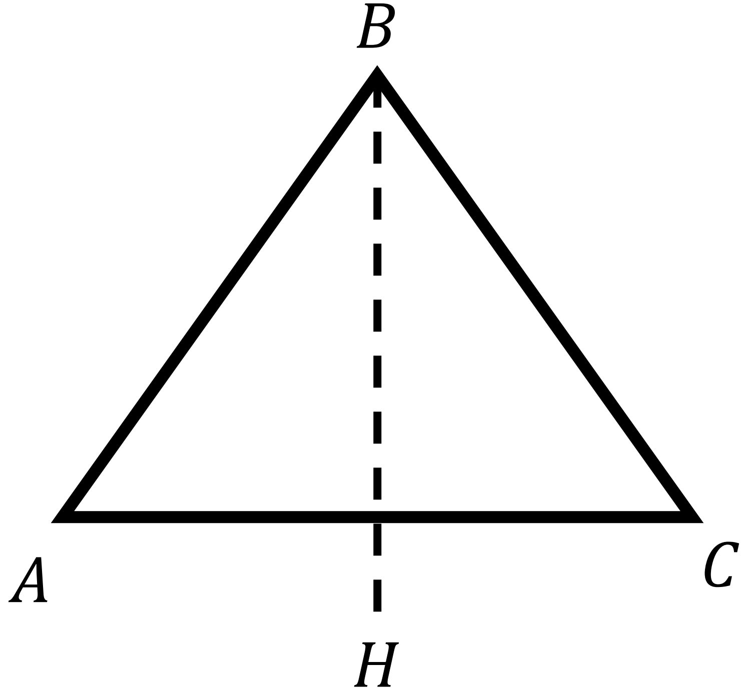
Caso 1:

Preso il triangolo equilatero A$\hat{B}$C di lato 1,

si ha che $\hat{A}$ = $\hat{B}$ = $\hat{C}$ = $\frac{\pi}{3}$

inoltre A$\hat{B}$H = H$\hat{B}$C = $\frac{\pi}{6}$

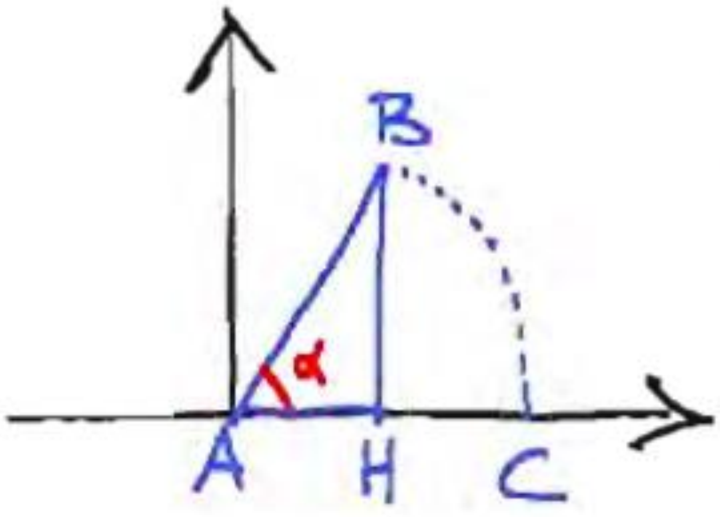
e infine $\overline{AH}$ = $\overline{HC}$ = ½ e $\overline{BH}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$



Ne segue che:

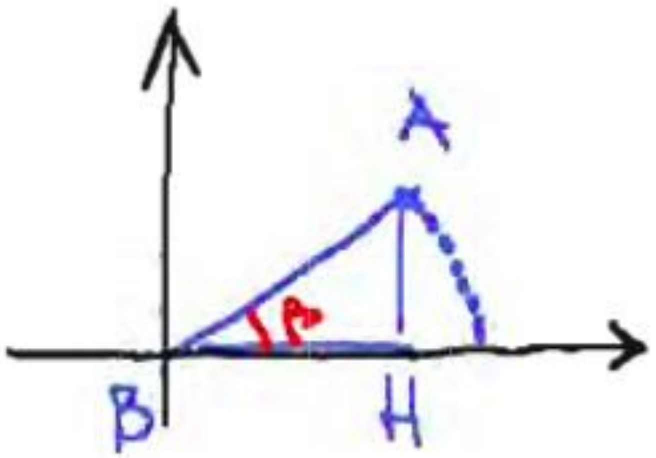
$$\cos\boldsymbol{\alpha} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \overline{AH} = ½$$

$$\operatorname{sen}\boldsymbol{\alpha} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\beta$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \overline{AH} = ½ \operatorname{sen}\beta$$



N.B.:

Si osservi che: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$ = cos $\frac{\pi}{6}$

Si osservi che: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$ = cos $\frac{\pi}{3}$

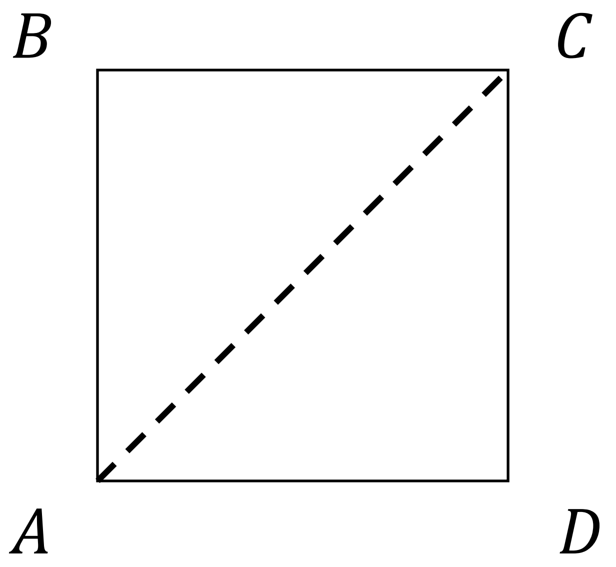
Caso 2:

Si consideri il quadrato di lato $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ABCD

Si ha: $\overline{AC}$ = 1

$\mathrm{A}\hat{C}\mathrm{D} = \mathrm{D}\hat{A}\mathrm{C}$ = $\frac{\pi}{4}$

$\widehat{D}$ = $\frac{\pi}{2}$



Ne segue che:

$\cos\boldsymbol{\alpha}= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \overline{AD} \;= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen}\boldsymbol{\alpha}= \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \overline{CD} \;=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{\alpha}= 0$ ---> $\cos 0 = 1$; $\operatorname{sen} 0 = 0$

$\boldsymbol{\alpha}= \frac{\pi}{2}$ ---> $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

In particolare, quando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$: $0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

$0 \leq \cos x \leq 1$

Quando $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ si ha: $0 < \text{sen}\, x < 1$

$-1 < \cos x < 0$

Quando $x = \pi$ si ha: $\text{sen}\, \pi = 0$

$\cos \pi = -1$

Quando $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ si ha: $-1 < \text{sen}\, x < 0$

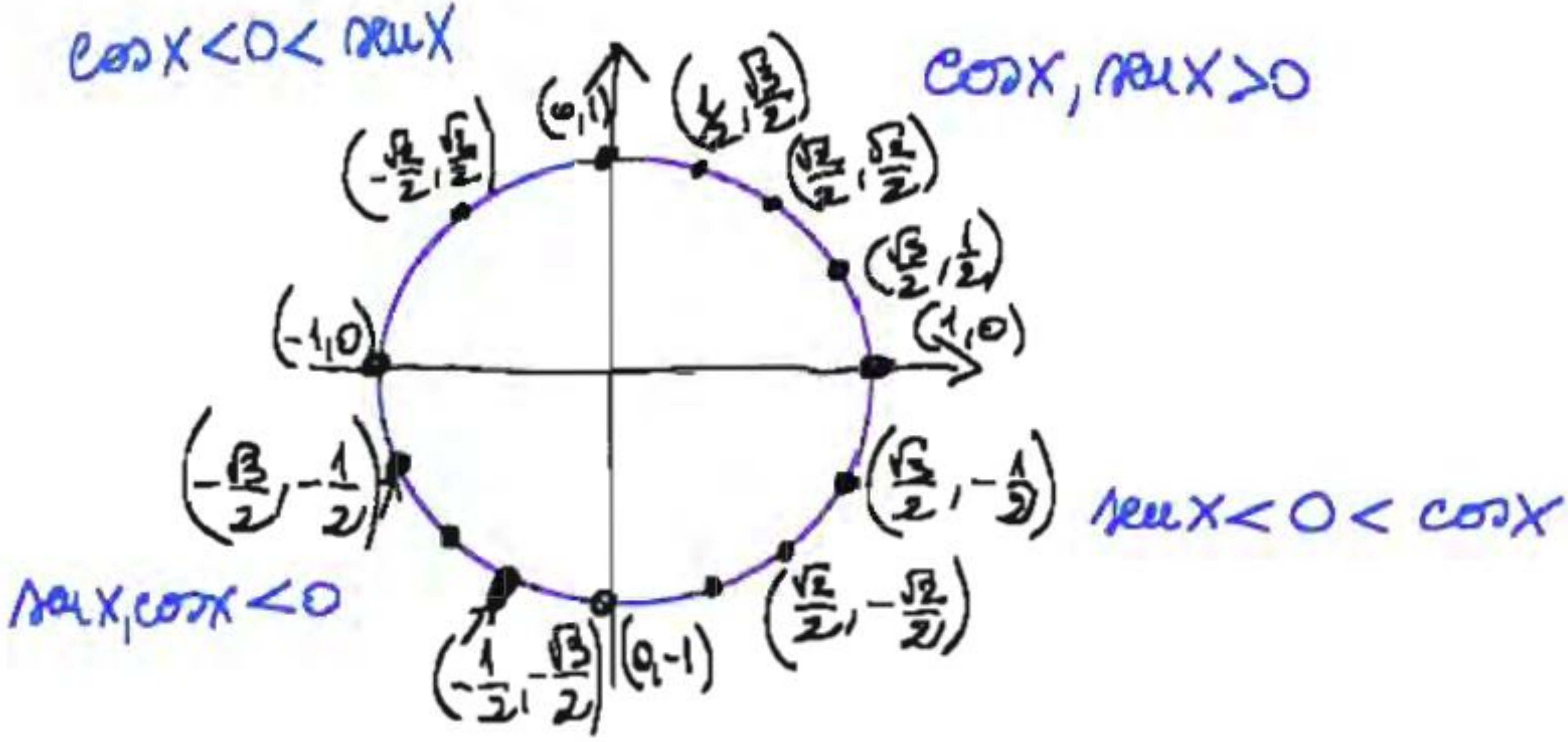
$-1 < \cos x < 0$

Quando $x = \frac{3}{2}\pi$ si ha: $\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1$

$\cos\frac{3}{2}\pi = 0$

Quando $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ si ha: $-1 < \operatorname{sen} x < 0$

$0 < \cos x < 1$



cos x < 0 < sen x
cos x, sen x > 0
sen x < 0 < cos x
sen x, cos x < 0
(0, 1)
(1/2, √3/2)
(√2/2, √2/2)
(√3/2, 1/2)
(1, 0)
(√3/2, −1/2)
(√2/2, −√2/2)
(0, −1)
(−1/2, −√3/2)
(−√3/2, −1/2)
(−1, 0)
(−√2/2, √2/2)

Tangente

Seconda relazione fondamentale:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Rapporto tangente-coefficiente angolare m

I grafici delle funzioni sono i seguenti:

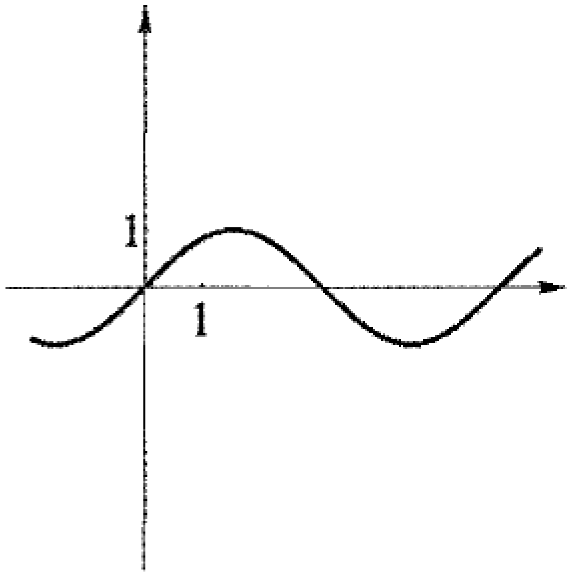


Fig. 2.23 : $y = \operatorname{sen} x$

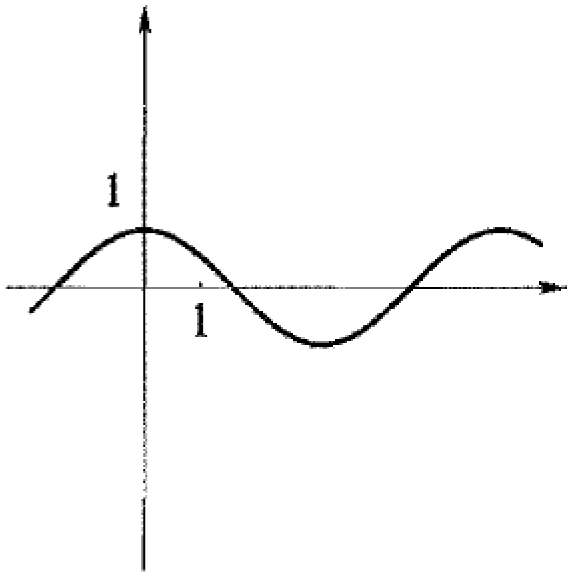


Fig. 2.24 : $y = \cos x$

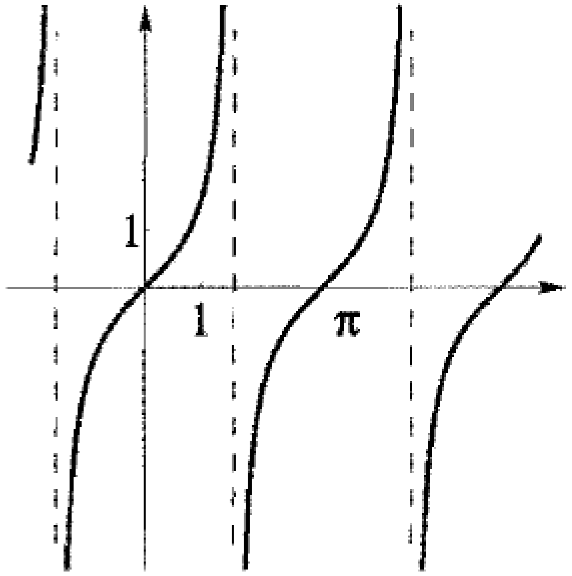


Fig. 2.25 : $y = \tan x$

Definizioni:

Parità di cosx $\equiv_{Def}$ **cos(x) = cos(-x)** $\forall$**x** $\in \mathbb{R}$

Disparità di senx $\equiv_{Def}$ **sen(-x) = - sen(x)** $\forall$**x** $\in \mathbb{R}$

Periodicità dei senx $\equiv_{Def}$ La funzione è 2π-periodica

sen(x) = sen ($x+2\pi$) = sen ($x + 4\pi$) = sen ($x+2k\pi$)

$\forall k \in Z \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Periodicità dei cosx $\equiv_{Def}$ La funzione è 2π-periodica

cos(x) = cos (x+2π) = cos (x + 4π) = cos (x+2kπ)

∀k ∈ Z ∀x ∈ $\mathbb{R}$

La funzione tg(x) $\equiv_{Def}$ ∀x ≠ $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

∀k ∈ Z

tg (x) = $\frac{sen\ x}{\cos x}$ è una funzione π periodica

Formule della somma:

Si dimostra che :

$$\text{sen}\,(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \text{sen}\boldsymbol{\alpha}\cdot\cos\boldsymbol{\beta} + \text{sen}\boldsymbol{\beta}\cdot\cos\boldsymbol{\alpha}$$

$$\cos\,(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \cos\boldsymbol{\alpha}\cdot\cos\boldsymbol{\beta} - \text{sen}\boldsymbol{\alpha}\cdot\text{sen}\boldsymbol{\beta}$$

$$\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}$$

Oss: come cambiano con il segno opposto le formule?

Come ricavo le formule di duplicazione?

Formule di duplicazione:

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}x \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

Come ricavo le formule di bisezione?

Formule di bisezione:

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cosx}{2}}$$

$$\text{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cosx}{2}}$$

Formule parametriche:

Esprimere senx, cosx e tgx in funzione di t = tg(x/2)

senx = $\frac{2t}{1+t^2}$ cosx = $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ tgx = $\frac{2t}{1-t}$

Importanti per le equazioni/disequazioni lineari in seno e coseno. Queste ultime si risolvono anche con l'equazione aggiunta. (Si vedano gli esercizi)

L’equazione sen φ = h

L’equazione sen φ = h non ha una soluzione unica infatti, se $\exists\ \bar{\vartheta} \in [0,2\pi[$: sen $\bar{\vartheta}$ = h allora:

-a) necessariamente $-1 \leq h \leq 1$

-b) necessariamente sen$(\pi - \bar{\vartheta})$ = h

-c) sen$(\bar{\vartheta} + 2k\pi)$ = h = sen $(\pi - \bar{\vartheta} + 2k\pi)$ $\forall k \in Z$

Ovvero $\bar{\vartheta}$ + 2kπ e (π - $\bar{\vartheta}$)+ 2kπ sono le infinite soluzioni al variare di k ∈ Z

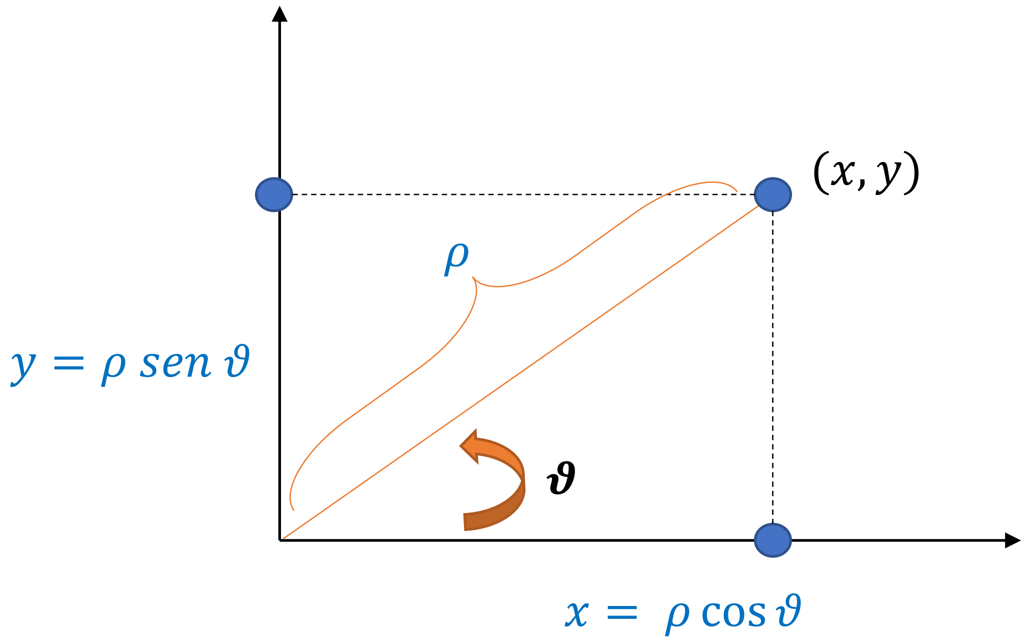
N.B.: è vero o falso che le soluzioni di

$$\begin{cases} sen\,\vartheta = sen\varphi \\ \cos\vartheta = \cos\varphi \end{cases}$$

sono ϑ = φ + 2kπ k ∈ Z ? Perché solo quella?

Coordinate polari (cenni):

Preso un punto P $\in \mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$ se conosciamo ρ = d(P,$(0,0)$)



$\boldsymbol{\vartheta}$ $=$angolo, misurato in verso antiorario, formato da PO con il semiasse positivo delle ascisse

Allora è immediato calcolare:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\vartheta \\ y = \rho \cdot sen\,\vartheta \end{cases}$$

ovvero le coordinate (x,y) del punto P.

Viceversa, dato un punto P di coordinate x,y è agevole calcolare:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Mentre calcolare ϑ è un poco più difficile poiché

$$\begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & se \quad 0 < x \quad e \quad 0 \leq y \\ \dfrac{\pi}{2} & se \;\; x = 0 \quad e \quad 0 < y \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x} & se \; x < 0 \\ 3\dfrac{\pi}{2} & se \; x = 0 \; e \; y < 0 \\ 2\pi + \; arctan \dfrac{y}{x} & se \; 0 < x \; e \; y < 0 \end{cases}$$

Esercizio

Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo di ampiezza $\frac{7\pi}{3}$

sen $\frac{7\pi}{3}$ = sen $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos $\frac{7\pi}{3}$ = cos $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{1}{2}$

tg $\frac{\pi}{3}$ = $\sqrt{3}$

Esercizio

Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo di ampiezza $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \text{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \text{sen}\frac{\pi}{4}\,\text{sen}\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$$

tg $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$

ed è < 0 in quanto $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$